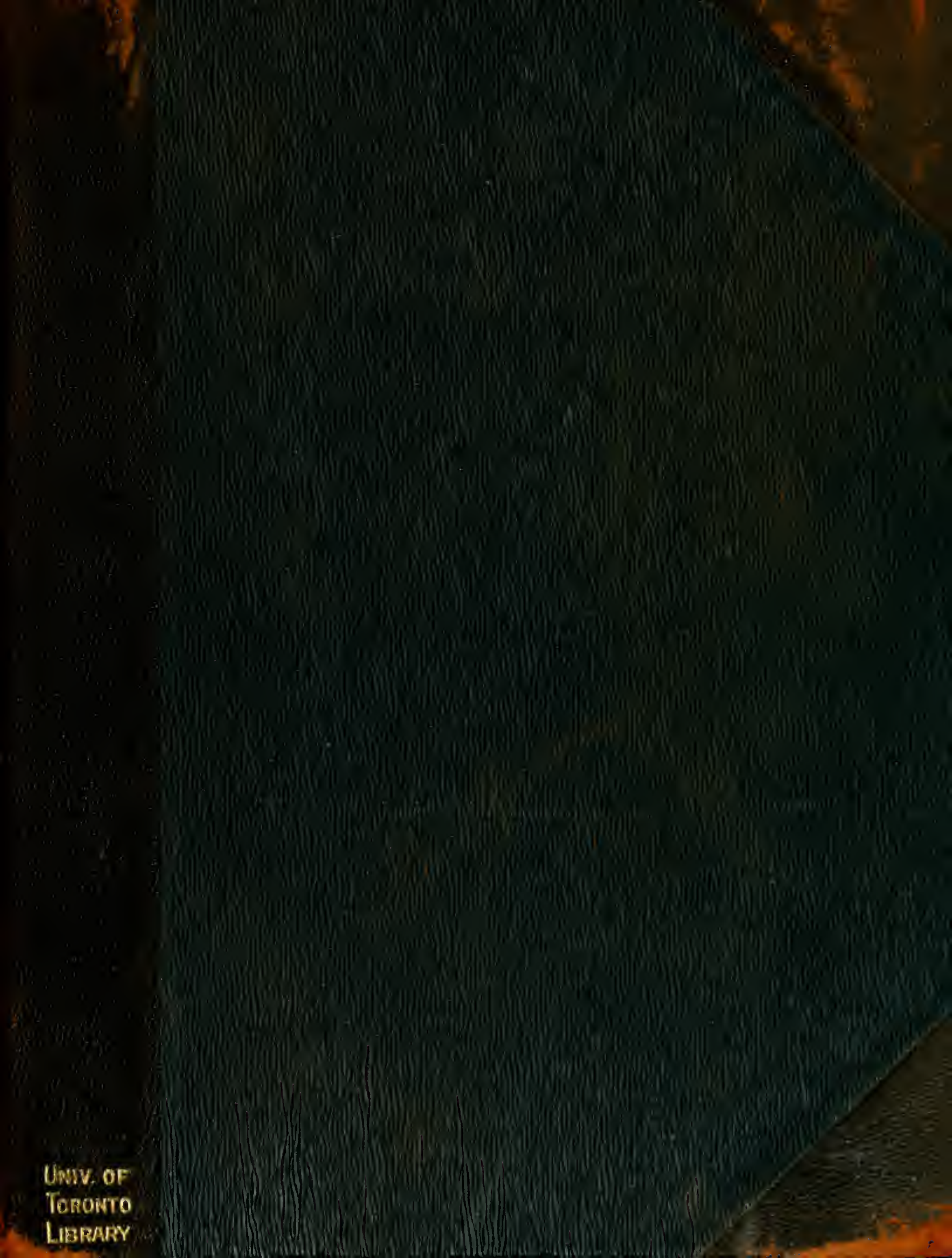

UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.


ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE.

PUBLIÉ DE 1875 A 1884

PAR H. RESAL.

SIXIÈME SÉRIE,

PUBLIÉE

PAR CAMILLE JORDAN,

AVEC LA COLLABORATION DE

M. LEVY, A. MANNHEIM, E. PICARD, H. POINCARÉ.

TOME DEUXIÈME. — ANNÉE 1906.

(61ᵉ Volume de la Collection.)

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1906

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Sur la propagation des réactions chimiques dans les gaz;

Par M. JOUGUET [1].

CHAPITRE III.

LES ONDES DE CHOC.

§ 1. — Généralités [2].

Formules générales. — **1.** Soit, dans le champ des variables de Lagrange, une surface S_0 séparant deux parties 1 et 2 de la masse

---

([1]) *Voir* t. I, fasc. IV, 1905, p. 347.

([2]) Ce paragraphe contient l'extension aux ondes quelconques et aux fluides à variable chimique des résultats obtenus par Riemann et Hugoniot pour les ondes planes des gaz ordinaires. Le cas des ondes quelconques a été traité pour

gazeuse. Supposons qu'au temps t le mouvement de la partie 1 soit défini par les fonctions analytiques suivantes de a, b, c, t :

$$(1) \qquad x_1,\ y_1,\ z_1,\ \rho_1,\ \alpha_1,\ T_1,\ p_1,\ u_1,\ v_1,\ w_1$$

(les lettres ont les significations définies dans ce qui précède) et celui de la partie 2 par les fonctions analytiques de a, b, c, t :

$$(2) \qquad x_2,\ y_2,\ z_2,\ \rho_2,\ \alpha_2,\ T_2,\ p_2,\ u_2,\ v_2,\ w_2.$$

On suppose que x_2, y_2, z_2 sont respectivement égaux à x_1, y_1, z_1 pour tous les points de S_0, mais que les dérivées premières de ces fonctions sont inégales. Il y a notamment, en général, inégalité entre les *vitesses* des molécules situées de part et d'autre de Σ_0, transformée de S_0 dans le champ des variables d'Euler. Il se produit donc, au temps t, un *choc* entre les parties 1 et 2 tout le long de Σ_0.

Nous ferons, avec Hugoniot, les hypothèses suivantes qui sont les plus simples qu'on puisse faire. Les mouvements (1) et (2) sont *brusquement* modifiés. Le mouvement (1) par exemple se transforme brusquement en un mouvement représenté par les fonctions analytiques de a, b, c, t suivantes :

$$(1') \qquad x'_1,\ y'_1,\ z'_1,\ \rho'_1,\ \alpha'_1,\ T'_1,\ p'_1,\ u'_1,\ v'_1,\ w'_1.$$

Cette modification est tout d'abord restreinte aux molécules de la partie 1 situées très près de S_0 ; elle se fait d'ailleurs instantanément,

---

la première fois par M. Hadamard dans son cours du Collège de France de 1898-1900. Dans une Note insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* du 18 mars 1901 (je ne connaissais pas à cette époque le cours de M. Hadamard, qui n'a été publié qu'en 1903), j'ai abordé le même problème par une méthode un peu différente, plus proprement thermodynamique. C'est la même méthode qu'a suivie M. Duhem dans ses études sur les ondes de choc. On pourra se reporter aux *Recherches sur l'Hydrodynamique* de cet auteur si l'on veut en suivre le développement ; je crois préférable de lui en substituer ici une autre, peut-être moins instructive, mais plus simple.

Quant à l'intervention de la variable chimique, j'ai fait remarquer dans cette Note du 18 mars 1901 qu'elle ne changeait pas les formules de Riemann et Hugoniot.

sans que ces molécules bougent sensiblement, de sorte que pour les points infiniment voisins de S_0, et pour l'époque t du choc, x'_1, y'_1, z'_1 sont égaux à x_1, y_1, z_1. Mais elle progresse dans la partie 1, de sorte que, à un instant quelconque $t+\theta$ postérieur à t, il existe une surface S_1 séparant 1 en deux parties, l'une 1° où règne encore le mouvement (1), l'autre 1′ où règne le mouvement (1′). Sur la surface S_1, les fonctions x'_1 et x_1, y'_1 et y_1, z'_1 et z_1 sont respectivement égales, mais il y a inégalité entre quelques-unes de leurs dérivées premières et des fonctions α'_1 et α_1, T'_1 et T_1. De même dans 2, il existe au temps $t+\theta$ une surface S_2 limitant deux parties, l'une 2° où règne encore le moumouvement (2), l'autre 2′ où règne le mouvement

$$(2') \qquad x'_2, y'_2, z'_2, \rho'_2, \alpha'_2, T'_2, p'_2, u'_2, v'_2, w'_2,$$

tel que x'_2, y'_2, z'_2 soient égaux à x_2, y_2, z_2 sur la surface S_2 au temps $t+\theta$.

S_1 et S_2 sont deux ondes de choc qui se propagent à partir de S_0. Les surfaces correspondantes dans le champ des variables d'Euler sont, *à l'instant t*, Σ_1, Σ_2, Σ_0. Dans ce qui suivra, λ, μ, ν seront les cosinus directeurs de la normale à Σ_0 menée de 2 vers 1 et nous supposerons que le temps θ est infiniment petit et égal à dt. Nous allons chercher les relations qui existent entre les valeurs avant et après le choc des vitesses, densités, pressions, etc. des molécules gazeuses situées infiniment près de S_0.

2. Il faut d'abord exprimer le fait que le choc ne trouble pas la continuité du milieu. C'est là une VÉRITABLE HYPOTHÈSE, mais elle découle directement de l'expérience que l'on a des fluides.

Pour que les parties 1′ et 2′ restent en contact après le choc, il faut d'abord que les vitesses en projection sur la normale λ, μ, ν à Σ_0 soient égales, ce qui s'exprime par

$$(3) \qquad \lambda u'_1 + \mu v'_1 + \nu w'_1 = \lambda u'_2 + \mu v'_2 + \nu w'_2,$$

ou, vu [(9) I], par

$$(4) \qquad L u'_1 + M v'_1 + N w'_1 = L u'_2 + M v'_2 + N w'_2.$$

Il faut encore que les pressions après le choc soient égales

$$(5)\qquad p'_1 = p'_2.$$

La surface S_1 est en somme une onde de choc se déplaçant dans le temps dt de S_0 à S_1. Il faut exprimer la continuité d'un élément traversé par cette onde de choc, et cela se fait en écrivant l'équation [(16) I] qui est ici :

$$(6)\qquad r\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho'_1}\right)\frac{dP_1}{dt} = L(u'_1 - u_1) + M(v'_1 - v_1) + N(w'_1 - w_1).$$

dP_1 est le chemin bb_1 mesuré sur la normale à S_0 dirigée de 2 vers 1 (*fig.* 9). Donc dP_1 est positif.

On a de même pour la propagation de S_2

$$(7)\qquad r\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho'_2}\right)\frac{dP_2}{dt} = L(u'_2 - u_2) + M(v'_2 - v_2) + N(w'_2 - w_2).$$

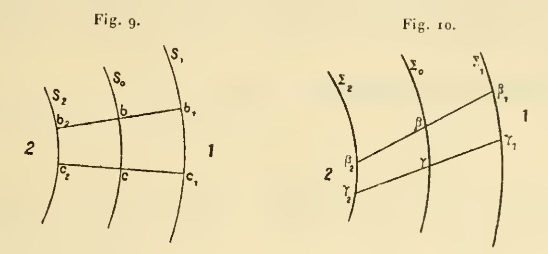
Dans cette formule, L, M, N devraient se calculer en prenant pour direction positive de la normale à S_0 celle qui va de 1 vers 2. dP_2 serait la longueur bb_2 mesurée sur cette normale. On y rétablira les mêmes L, M, N que dans (6) en convenant de mesurer bb_2 sur la normale de 2 vers 1. Alors dP_2 sera négatif.

3. Nous obtiendrons six autres équations par l'application du théorème des quantités de mouvement, qui est un théorème de Thermodynamique aussi bien que de Mécanique classique. Soit un élément $bc = ds$ de la surface S_0 et deux petits cylindres $bc\,b_1c_1$, $bc\,b_2c_2$ normaux à S_0. Le cylindre bcb_1c_1 a une masse $r\,ds\,dP_1$. Au temps t toute sa masse est animée de la vitesse $\overline{V}_1 = \overline{u}_1 + \overline{v}_1 + \overline{w}_1$; au temps $t + dt$ elle a la vitesse $\overline{V}'_1 = \overline{u}'_1 + \overline{v}'_1 + \overline{w}'_1$. La variation de la quantité de mouvement est donc, en projection sur Ox,

$$r\,ds\,dP_1(u'_1 - u_1).$$

Pour calculer l'impulsion des forces, représentons en Σ_0, Σ_1, Σ_2 les positions de S_0, S_1, S_2 *à l'instant t où se produit le choc*. La masse $bc\,b_1c_1$ occupe alors la position $\beta\gamma\beta_1\gamma_1$. Sur la surface $\beta\gamma = d\sigma$ va régner, pendant tout l'intervalle dt, la pression p_1. L'impulsion en

projection sur Ox sera donc $p'_1 \lambda \, d\sigma \, dt$. Sur $\beta_1 \gamma_1$ règne au contraire, durant le même intervalle, la pression p_1 dont l'impulsion est $p_1 \lambda \, d\sigma \, dt$. Sur les faces latérales $\beta\beta_1$, $\gamma\gamma_1$ les pressions sont à chaque instant



égales et directement opposées au premier ordre près : la somme de leurs impulsions est donc négligeable devant les termes précédents. On a donc

$$r \, ds \, dP_1 (u'_1 - u_1) = (p'_1 - p_1) \lambda \, d\sigma \, dt.$$

D'où la première des équations suivantes, les autres se démontrant d'une façon analogue,

$$(8) \qquad \begin{cases} r \dfrac{dP_1}{dt} (u'_1 - u_1) = L \, (p'_1 - p_1), \\ r \dfrac{dP_1}{dt} (v'_1 - v_1) = M (p'_1 - p_1), \\ r \dfrac{dP_1}{dt} (w'_1 - w_1) = N \, (p'_1 - p_1). \end{cases}$$

On démontrera par la même méthode les formules suivantes dans lesquelles dP_2 est négatif :

$$(9) \qquad \begin{cases} r \dfrac{dP_2}{dt} (u'_2 - u_2) = L \, (p'_2 - p_2), \\ r \dfrac{dP_2}{dt} (v'_2 - v_2) = M (p'_2 - p_2), \\ r \dfrac{dP_2}{dt} (w'_2 - w_2) = N \, (p'_2 - p_2). \end{cases}$$

4. Il reste à écrire maintenant les équations qui jouent le rôle de relations supplémentaires. Nous admettrons que le mouvement est adiabatique et, prenant l'élément bcb_1c_1, nous écrirons, avec Hugoniot, que, pendant le temps dt, le travail des forces agissant sur lui est égal à la variation d'énergie interne augmentée de la variation de force vive.

La variation d'énergie interne et de force vive est

$$\frac{r\,ds\,dP_1}{2}(V_1'^2 - V_1^2) + r\,ds\,dP_1(U_1' - U_1),$$

U étant l'énergie interne de l'unité de masse du fluide exprimée en *unités mécaniques*. Quant aux forces extérieures, les seules qui donnent un travail du troisième ordre, comme l'expression ci-dessus, sont les pressions appliquées sur $\beta\gamma$, $\beta_1\gamma_1$. Ce travail est

$$p_1'\,d\sigma\,dt(\lambda u_1' + \mu v_1' + \nu w_1') - p_1\,d\sigma\,dt(\lambda u_1 + \mu v_1 + \nu w_1)$$

ou

$$[p_1'(Lu_1' + Mv_1' + Nw_1') - p_1(Lu_1 + Mv_1 + Nw_1)]\,ds\,dt.$$

On a donc

$$(10)\quad \begin{cases} r\dfrac{dP_1}{dt}\left(\dfrac{V_1'^2 - V_1^2}{2} + U_1' - U_1\right) \\ \quad = p_1'(Lu_1' + Mv_1' + Nw_1') - p_1(Lu_1 + Mv_1 + Nw_1). \end{cases}$$

On aurait de même

$$(11)\quad \begin{cases} r\dfrac{dP_2}{dt}\left(\dfrac{V_2'^2 - V_2^2}{2} + U_2' - U_2\right) \\ \quad = p_2'(Lu_2' + Mv_2' + Nw_2') - p_2(Lu_2 + Mv_2 + Nw_2). \end{cases}$$

L'équation (10) peut d'ailleurs se mettre sous une forme qui ne contient que les variables fixant l'état physique et chimique du fluide dans les mouvements 1 et 1'. On peut, en effet, l'écrire

$$r\frac{dP_1}{dt}\left[\frac{(u_1' - u_1)(u_1' + u_1) + (v_1' - v_1)(v_1' + v_1) + (w_1' - w_1)(w_1' + w_1)}{2} + U_1' - U_1\right]$$
$$= p_1'(Lu_1' + Mv_1' + Nw_1') - p_1(Lu_1 + Mv_1 + Nw_1).$$

Tenant compte de (6) et de (8), on trouve

$$\frac{(\rho_1-\rho'_1)(p_1+p'_1)}{2}[L(u_1-u'_1)+M(v_1-v'_1)+N(w_1-w'_1)]$$
$$+\rho_1\rho'_1(U'_1-U_1)[L(u_1-u'_1)+M(v_1-v'_1)+N(w_1-w'_1)]=0.$$

Supposons que le facteur $L(u_1-u'_1)+M(v_1-v'_1)+N(w_1-w'_1)$ soit différent de zéro. On a alors

$$(12)\qquad \frac{(\rho_1-\rho'_1)(p_1+p'_1)}{2}+\rho_1\rho'_1(U'_1-U_1)=0.$$

On aurait de même

$$(13)\qquad \frac{(\rho_2-\rho'_2)(p_2+p'_2)}{2}+\rho_2\rho'_2(U'_2-U_2)=0.$$

La formule (12) [ou (13)] est l'expression de la *loi adiabatique dynamique d'Hugoniot.*

Cas de la compatibilité. — 5. On dit, depuis Hugoniot, que les mouvements 1 et 2 qui se choquent le long de Σ_0 au temps t sont *compatibles* lorsque le phénomène qui suit le choc est une propagation de 2 dans 1. Il faut pour cela que les mouvements 1′ et 2′ soient identiques à 2.

$$u'_1=u_2,\quad v'_1=v_2,\quad w'_1=w_2,\quad \rho'_1=\rho_2,\quad p'_1=p_2,$$
$$u'_2=u_2,\quad v'_2=v_2,\quad w'_2=w_2,\quad \rho'_2=\rho_2,\quad p'_2=p_2.$$

En introduisant ces hypothèses dans (3), (5), (6), (7), (8), (9), (10), (11), les équations (3), (5), (7), (9) se réduisent à des identités; par suite $\frac{dP_2}{dt}$ est indéterminé, et il reste, en écrivant dP à la place de dP_1,

$$(14)\qquad r\left(\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_2}\right)\frac{dP}{dt}=L(u_2-u_1)+M(v_2-v_1)+N(w_2-w_1).$$

$$(15)\quad \begin{cases} r\dfrac{dP}{dt}(u_2 - u_1) = L(p_2 - p_1), \\ r\dfrac{dP}{dt}(v_2 - v_1) = M(p_2 - p_1), \\ r\dfrac{dP}{dt}(w_2 - w_1) = N(p_2 - p_1). \end{cases}$$

$$(16)\quad \begin{cases} r\dfrac{dP}{dt}\left(\dfrac{V_2^2 - V_1^2}{2} + U_2 - U_1\right) \\ \quad = p_2(Lu_2 + Mv_2 + Nw_2) - p_1(Lu_1 + Mv_1 + Nw_1). \end{cases}$$

L'équation (16) peut d'ailleurs, en général, être remplacée par

$$(17)\quad \frac{(\rho_1 - \rho_2)(p_1 + p_2)}{2} + \rho_1\rho_2(U_2 - U_1) = 0.$$

Les équations (14), (15), (16) sont cinq équations à une seule inconnue $\frac{dP}{dt}$. En éliminant $\frac{dP}{dt}$ on obtiendra quatre conditions entre les éléments des mouvements 1 et 2, nécessaires pour que ces mouvements soient compatibles. Il est bien évident qu'en général une de ces conditions est l'équation (17).

Nous nous placerons à partir de maintenant dans le cas de la compatibilité, c'est-à-dire dans le cas où une onde de choc S *se propage* dans le fluide. Que la chose soit possible, cela constitue évidemment une hypothèse mais suffisamment justifiée par les faits. Nous aurons donc à appliquer les formules (14), (15), (16), (17) à l'onde S.

De (14) et (15), d'ailleurs, on tire facilement

$$(18)\quad \frac{1}{L^2 + M^2 + N^2}\,\frac{r^2}{\rho_1\rho_2}\left(\frac{dP}{dt}\right)^2 = \frac{p_1 - p_2}{\rho_1 - \rho_2},$$

formule remarquable par son parallélisme avec [(9) II]. La discontinuité en p peut être définie par le paramètre $p_1 - p_2$, celle en ρ par le paramètre $\rho_1 - \rho_2$, et c'est le quotient de ces deux paramètres qui donne $\frac{1}{L^2 + M^2 + N^2}\frac{r^2}{\rho_1\rho_2}\left(\frac{dP}{dt}\right)^2$.

Dans le champ des variables d'Euler, l'onde S devient une onde Σ. Les formules (14), (15), (18) deviennent, en vertu de [(13) I] et

[(15) I] :

$$(19)\quad \frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_2}\frac{d\varpi_1}{dt} = \frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1}\frac{d\varpi_2}{dt} = \lambda(u_2-u_1)+\mu(v_2-v_1)+\nu(w_2-w_1),$$

$$(20)\quad \begin{cases} \rho_1\frac{d\varpi_1}{dt}(u_2-u_1) = \rho_2\frac{d\varpi_2}{dt}(u_2-u_1) = \lambda(p_2-p_1), \\ \rho_1\frac{d\varpi_1}{dt}(v_2-v_1) = \rho_2\frac{d\varpi_2}{dt}(v_2-v_1) = \mu(p_2-p_1), \\ \rho_1\frac{d\varpi_1}{dt}(w_2-w_1) = \rho_2\frac{d\varpi_2}{dt}(w_2-w_1) = \nu(p_2-p_1), \end{cases}$$

$$(21)\quad \frac{\rho_1}{\rho_2}\left(\frac{d\varpi_1}{dt}\right)^2 = \frac{\rho_2}{\rho_1}\left(\frac{d\varpi_2}{dt}\right)^2 = \frac{p_1-p_2}{\rho_1-\rho_2}.$$

6. Nous supposons toujours, bien entendu, qu'il y a une véritable onde persistante, c'est-à-dire que $\frac{dP}{dt}$ n'est pas infini. Il peut être fini ou nul.

L'emploi de la formule (17) suppose que

$$L(u_2-u_1)+M(v_2-v_1)+N(w_2-w_1)$$

est différent de zéro. Supposons qu'il en soit ainsi.

Dès lors, il est nécessaire que l'une au moins des quantités u_2-u_1, v_2-v_1, w_2-w_1 ne soit pas nulle; il est nécessaire aussi, par (14), que $\rho_1 \neq \rho_2$ et $\frac{dP}{dt} \neq 0$. Il y a donc *propagation* d'une onde avec *discontinuité mécanique*, qui peut présenter en outre une *discontinuité chimique* ($\alpha_1 \neq \alpha_2$), mais qui peut aussi n'en point présenter ($\alpha_1 = \alpha_2$). Les formules (15) montrent d'ailleurs que

$$(22)\quad \frac{L}{u_2-u_1} = \frac{M}{v_2-v_1} = \frac{N}{w_2-w_1},$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{\lambda}{u_2-u_1} = \frac{\mu}{v_2-v_1} = \frac{\nu}{w_2-w_1}.$$

Le vecteur $\overline{V_2}-\overline{V_1} = \overline{u_2-u_1}+\overline{v_2-v_1}+\overline{w_2-w_1}$ est perpendiculaire à l'onde dans le champ des variables d'Euler; la discontinuité est *longitudinale*.

Supposons maintenant

$$(23) \qquad L(u_2 - u_1) + M(v_2 - v_1) + N(w_2 - w_1) = 0,$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\lambda(u_2 - u_1) + \mu(v_2 - v_1) + \nu(w_2 - w_1) = 0.$$

Le vecteur $\overline{V_2} - \overline{V_1}$ est tangent à l'onde Σ; la discontinuité est *transversale* [1]. La formule (17) est alors à rejeter et il faut employer (16).

Ce cas comprend d'ailleurs celui où $u_2 = u_1$, $v_2 = v_1$, $w_2 = w_1$. Il est facile de voir en effet que, dans ce dernier cas, les formules (14), (15), (16) sont encore applicables.

Les équations (15), respectivement multipliées par L, M, N et ajoutées, donnent

$$(24) \qquad \begin{cases} v \dfrac{dP}{dt}[L(u_2 - u_1) + M(v_2 - v_1) + N(w_2 - w_1)] \\ \quad = (L^2 + M^2 + N^2)(p_2 - p_1). \end{cases}$$

Comme $L(u_2 - u_1) + M(v_2 - v_1) + (w_2 - w_1)$ est nul et que $\dfrac{dP}{dt}$ n'est pas infini, il faut que

$$(25) \qquad p_2 = p_1.$$

De plus, (14) donne les résultats suivants :

1° Ou bien $\rho_1 \neq \rho_2$. Alors forcément $\dfrac{dP}{dt} = 0$. L'onde S ou Σ est une surface de discontinuité pour la densité, mais non pour la pression [*voir* (25)]. Elle peut être ou n'être pas surface de discontinuité pour la variable chimique. S est immobile et Σ sépare toujours les deux mêmes masses de fluide.

2° Ou bien $\rho_2 = \rho_1$. On a toujours, par (25),

$$p_2 = p_1.$$

---

[1] Évidemment, dans ce cas, la dénomination d'onde de choc est purement conventionnelle.

Il peut alors se présenter trois sous-cas :

a. L'une au moins des quantités u_2, v_2, w_2 est différente de u_1, v_1, w_1. Alors $\frac{dP}{dt}$ est nul par (15). On a une surface de discontinuité pour la vitesse séparant toujours les mêmes masses de matière. Cette surface peut être ou n'être pas surface de discontinuité pour α.

b. $u_2 = u_1$, $v_2 = v_1$, $w_2 = w_1$, $\alpha_1 = \alpha_2$. Comme $p_1 = p_2$, il faut alors que $T_1 = T_2$. On retombe sur les ondes étudiées au Chapitre précédent.

c. $u_2 = u_1$, $v_2 = v_1$, $w_2 = w_1$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$. La discontinuité est chimique et non mécanique. Les températures T_1 et T_2 doivent être alors soit égales, soit inégales suivant les cas, pour maintenir l'égalité entre p_1 et p_2; elles doivent être égales, par exemple, si le système étudié est un mélange de gaz parfaits dont la combustion se fait sans contraction ni dilatation. La vitesse $\frac{dP}{dt}$ est laissée indéterminée. Elle peut être nulle. Peut-elle être différente de zéro? Cela paraît tout à fait improbable, parce que la combustion d'un élément de masse (variation de α à la traversée de l'onde) ne paraît pas pouvoir laisser constants, au moins dans les mélanges explosifs, à la fois la densité et la pression. Nous éliminerons donc l'hypothèse $\frac{dP}{dt} \neq 0$.

Faits d'expérience. — **7.** Ainsi donc, lorsque

$$L(u_2 - u_1) + M(v_2 - v_1) + N(w_2 - w_1) = 0$$

et qu'il y a vraiment discontinuité, sur l'onde, dans une des quantités u, v, w, ρ, α, T, cette onde sépare toujours les mêmes parties de matière, et il n'y a jamais discontinuité dans les pressions. Si la discontinuité porte sur les vitesses u, v, w, on a une *surface de glissement*.

Le problème traité au début de ce Chapitre (n^{os} **1** à **4**) donne un exemple d'une onde de cette nature avec discontinuité dans les densités. Quand les mouvements 1 et 2 se choquent, les douze quantités ρ'_1, u'_1, v'_1, w'_1, p'_1, ρ'_2, u'_2, v'_2, w'_2, p'_2, $\frac{dP_1}{dt}$, $\frac{dP_2}{dt}$ sont déterminées par les douze équations (3), (5), (6), (7), (8), (9), (10), (11). Rien n'oblige ρ'_2 et ρ'_1

à être égaux, et un calcul dans un cas particulier simple montrerait que, en effet, ils ne le sont pas. Aux points où 1 et 2 se sont choqués, il se produit donc une surface de discontinuité pour ρ qui reste immobile par rapport à la matière du fluide.

Quand deux ondes de choc planes parallèles au plan y, z se rejoignent dans un fluide, le phénomène qui se passe n'est autre chose que le choc de deux mouvements l'un contre l'autre. Donc, à cette rencontre, il doit se produire deux ondes de choc, lancées l'une en avant, l'autre en arrière, et une surface de discontinuité pour ρ, immobile dans le champ de Lagrange. Reportons-nous maintenant à ce que M. Le Chatelier nous a appris de la naissance de l'onde explosive (**II**, **51**). Nous avons admis qu'elle se produisait par la réunion d'une onde de choc et d'une flamme qui est elle-même une seconde onde de choc. Si cela est vrai, il doit y avoir, à cet instant, lancement d'une onde de choc en avant et d'une autre en arrière, avec production d'une surface de discontinuité en ρ. Nous avons dit que l'expérience montrait, en effet, l'existence des deux ondes de choc, dont l'une est l'onde explosive; disons maintenant qu'elle montre aussi une apparence qui est peut-être la trace de la discontinuité en ρ : au point où l'onde explosive a pris naissance, une masse sombre se produit qui reste immobile par rapport à la matière du fluide.

Les quantités α_1 et T_1 peuvent être discontinues sur ces ondes, caractérisées par (23) et par une vitesse de propagation nulle. Peut-on citer des exemples de ce fait?

Pour qu'il y ait discontinuité dans les températures, il faut que la conductibilité soit excessivement faible; nous préciserons ce qu'il faut entendre par là dans le n° **11**.

Prenons un gaz jouissant de cette propriété. Élevons la température d'une région limitée par une surface S, de manière à enflammer cette région. On peut concevoir que cette région brûle seule, α et T y variant sans que la chaleur passe à la région voisine; la surface S séparera ainsi toujours les deux mêmes masses de gaz et sera une de ces ondes que nous venons d'étudier. Ce résultat donne quelques indications sur la manière dont se produit une inflammation. Au début de l'inflammation, la température étant peu élevée, on peut admettre grossièrement que la chaleur perdue par conductibilité est faible; le gaz

enflammé commence à brûler sans mettre le feu au gaz voisin, dont il est séparé par une onde S, de la nature de celle dont nous venons de parler. Mais, la température s'élevant, la chaleur perdue par conductibilité devient sensible; on ne peut plus la négliger; le problème devient plus compliqué; toutefois on peut encore admettre, au moins grossièrement, que la surface S reste une surface de discontinuité pour α et T, tant que les molécules voisines du gaz non brûlé n'ont pas été portées à la température d'inflammation. Ce n'est là, il est vrai, qu'une conception tout à fait grossière, comme on s'en rendra compte quand on connaîtra le théorème du n° **11**. Nous dirons néanmoins que les phénomènes qui se passent au début d'une inflammation nous fournissent un exemple approximatif de ces ondes où $\frac{d\mathrm{V}}{dt} = 0$ et où il y a discontinuité dans T et dans α.

Les moteurs à gaz nous en fournissent un autre. On sait que, dans la pratique de ces machines, plusieurs dispositions reposent sur le fait que des tranches de gaz brûlés et de gaz non brûlés, mises côte à côte, restent assez longtemps séparées. La surface de séparation est alors une onde de l'espèce qui nous occupe. Il est vrai que, au bout d'un certain temps, ces tranches se diffusent les unes dans les autres. Notre théorie ne donne pas ce phénomène de la diffusion; elle s'en tient à une première approximation. Il ne faut pas s'en étonner, car la diffusion a été éliminée dès le début en écrivant l'équation de continuité $\rho = \frac{r}{\mathrm{D}}$. Il y a, dans cette écriture, une véritable hypothèse : « Deux liquides ou deux gaz mis en présence, dit M. Hadamard (¹), finissent, en général, par se mélanger : dans ce cas, il est clair que des molécules séparées primitivement par des intervalles finis, — à savoir celles qui appartiennent respectivement aux deux fluides et n'étaient pas primitivement situées sur leur surface de contact, — viennent plus tard en contact immédiat les unes avec les autres. Il n'y a évidemment aucune raison de supposer que les différentes parties d'un même fluide ne diffusent pas les unes dans les autres, comme le font les molécules de deux fluides différents. » Et nous ajouterons que cette remarque est particulièrement vraie, lorsqu'on étudie, comme nous le faisons ici,

(¹) HADAMARD, *loc. cit.*, p. 59.

un fluide contenant une variable chimique, c'est-à-dire susceptible de se transformer en un fluide différent au point de vue physique et chimique. « S'il en est ainsi, ajoute M. Hadamard, x, y, z, tout en étant continues par rapport à t, seront des fonctions totalement discontinues de a, b, c. Malgré cela, l'hypothèse de la continuité semble, dans un grand nombre de cas, rendre un compte suffisant des phénomènes. » Mais il n'y a pas à s'étonner si parfois elle ne donne qu'une première et grossière approximation.

Rôle de la viscosité et de la conductibilité. — **8.** La discussion qui précède montre que, toutes les fois qu'une onde S se *propage véritablement* $\left(\frac{d\mathrm{P}}{dt} \neq 0\right)$, les éléments matériels subissent, à sa traversée, une variation brusque de densité ou de composition chimique, parfois des deux. Parlons de la densité ρ; ce que nous en dirons s'appliquera à α.

Il paraît assez difficile de concevoir, pour la densité, la saute brusque d'une valeur à une autre, sans passage par les valeurs intermédiaires, au moins lorsqu'il s'agit de la densité d'une masse finie. L'hypothèse d'une onde S où ρ est discontinue n'entraîne, il est vrai, la nécessité d'une telle conception que pour des masses infiniment petites; mais il faut reconnaître que, même ainsi, elle est des plus obscures et que le seul moyen de la bien comprendre est de considérer que la densité varie, non pas instantanément à la traversée d'une surface *géométrique* S, mais bien très rapidement au passage d'*une zone très étroite* qui peut, dans des calculs très approchés, être assimilée à une surface. Une telle zone est, selon l'expression de M. Duhem, une *quasi-onde* (¹).

(¹) Pour étudier les ondes de choc et démontrer, par exemple, qu'il ne peut exister aucune onde de choc dans un fluide dont la viscosité suit les lois habituellement admises pour ce phénomène, M. Duhem pose que les propriétés des ondes de choc sont les limites des propriétés des quasi-ondes dont l'épaisseur tend vers zéro (voir *Recherches sur l'Hydrodynamique,* 2e Partie, Chap. II, § 4, p. 83). Cette manière de faire revient, en somme, à admettre qu'il n'y a pas d'ondes de choc proprement dites, qu'il n'y a que des quasi-ondes d'épaisseur très petite. Il nous paraît intéressant d'insister sur ce point que cette conception est la seule vraiment claire et que, par suite, elle s'impose presque obligatoirement.

Sur les quasi-ondes, voir *Recherches sur l'Hydrodynamique,* 3e Part., 1903.

Mais alors, s'il en est ainsi, il semble que nous soyons acculés à une contradiction. Puisqu'il n'y a plus variation brusque, mais seulement variation rapide de ρ, α, T, on peut penser que la relation supplémentaire ne cesse pas d'avoir la forme [(20) I]. Comment se fait-il que cette forme puisse donner l'équation (17)? La contradiction apparaît très nette si l'on prend le cas d'un gaz parfait sans variable chimique. [(20) I] est alors équivalent à la loi de Poisson

$$(26) \qquad \frac{p_1}{\rho_1^\gamma} = \frac{p_2}{\rho_2^\gamma} \qquad (\gamma \text{ rapport des chaleurs spécifiques}),$$

tandis que (17) peut s'écrire

$$(27) \qquad p_2 = p_1 \frac{(\gamma+1)\rho_2 - (\gamma-1)\rho_1}{(\gamma+1)\rho_1 - (\gamma-1)\rho_2}.$$

Ces deux lois ne sont certainement pas identiques.

9. La difficulté se lève en faisant intervenir tout d'abord la viscosité relative à la variable ρ. Ce n'est que par approximation qu'on peut négliger cette viscosité dans l'étude du mouvement des gaz, parce que les coefficients de viscosité sont très faibles. Mais, quand les variations de densité sont très rapides, si faibles que soient les coefficients de viscosité, le travail de celle-ci peut être notable. De là une première raison pour laquelle il est illégitime de prendre l'équation complémentaire sous la forme [(20) I].

Continuons à raisonner, pour simplifier, sur le cas d'un fluide sans variable chimique. Soit un élément de volume $d\varpi$ pris dans la masse fluide, telle qu'elle existe à l'instant t. Le travail de la viscosité de cet élément, dans un déplacement virtuel δx, δy, δz, est

$$\left[\nu_x \frac{\partial \delta x}{\partial x} + \nu_y \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \nu_z \frac{\partial \delta z}{\partial z} + \tau_x\left(\frac{\partial \delta y}{\partial z} + \frac{\partial \delta z}{\partial y}\right) \right.$$
$$\left. + \tau_y\left(\frac{\partial \delta z}{\partial x} + \frac{\partial \delta x}{\partial z}\right) + \tau_z\left(\frac{\partial \delta z}{\partial y} + \frac{\partial \delta y}{\partial x}\right)\right] d\varpi.$$

ν_x, ν_y, ν_z, τ_x, τ_y, τ_z sont des fonctions de ρ, T et des vitesses de déformation $\frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial w}{\partial z}$ de l'élément, fonctions qui sont nulles quand ces

vitesses sont nulles. Que deviennent-elles quand $\frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial w}{\partial z}$ sont infinies, comme elles le sont au passage de la quasi-onde de choc? On peut se rendre compte que, s'il existe une quasi-onde de choc, elles doivent rester finies.

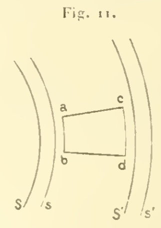
Il nous paraît plus clair de passer aux variables de Lagrange par la formule [(6) I]. Le travail virtuel de la viscosité s'écrit alors

$$\left(A_x \frac{\partial \delta x}{\partial a} + B_x \frac{\partial \delta x}{\partial b} + C_x \frac{\partial \delta x}{\partial c} + A_y \frac{\partial \delta y}{\partial a} + \cdots\right) dm,$$

dm étant la masse de l'élément, A_x, B_x, ... étant des fonctions de $\frac{\partial x}{\partial a}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial c}, \frac{\partial^2 x}{\partial a\, \partial t}, \frac{\partial^2 x}{\partial b\, \partial t}, \ldots$ Que deviennent A_x, B_x, .. quand $\frac{\partial^2 x}{\partial a\, \partial t}, \ldots$ sont infinis? Nous raisonnerons sur A_x pour fixer les idées.

Nous devons supposer la quasi-onde assez étroite pour que son épaisseur h puisse être considérée comme infiniment petite; c'est à cette condition que $\frac{\partial^2 x}{\partial a\, \partial t} \cdots$ sont infinis. Soient dans le champ de Lagrange S et s les surfaces qui limitent cette quasi-onde au temps t. Entre S et s, $\frac{\partial^2 x}{\partial a\, \partial t} \cdots$ sont très grands : ils restent finis au dehors. Soient S' et s' les mêmes surfaces au temps $t + \theta$. Le temps θ est tel que S's' soit entièrement extérieur à Ss. Malgré cela, vu la petitesse de h,

Fig. 11.



on peut supposer θ assez petit pour que les variations subies en un point par ρ, T, u, v, w, α après ou avant le passage de la quasi-onde soient négligeables devant celles que provoque ce passage; en d'autres termes, on peut considérer θ comme infiniment petit. Soit un élément de masse $abcd$ compris entre s et S' et infiniment petit dans ses trois

dimensions, dm sa masse. Le travail de la viscosité pendant le temps θ est, si l'on se borne au premier terme,

$$dm \int_t^{t+\theta} A_x \frac{\partial^2 x}{\partial a\, \partial t}\, dt.$$

$\frac{\partial x}{\partial a}$ passe de $\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)_1$ à $\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)_2$ dans le temps θ; ces deux valeurs diffèrent d'une quantité finie; $\frac{\partial^2 x}{\partial a\, \partial t}$ est donc infiniment grand de l'ordre de $\frac{1}{\theta}$. Si A_x devenait infini, ce travail serait infiniment grand par rapport à la masse dm. Dès lors la quantité de chaleur dégagée par l'élément dm pendant le temps θ serait infiniment grande par rapport à dm, ce qui est inadmissible puisque l'élément ne subit qu'un changement d'état fini.

Considérons aussi la pression à l'intérieur de la quasi-onde sur un élément de surface dont la normale est n. La viscosité introduit dans cette pression les termes

$$p_x = -[\nu_x \cos(n, x) + \tau_z \cos(n, y) + \tau_y \cos(n, z)],$$
$$p_y = -[\tau_z \cos(n, x) + \nu_y \cos(n, y) + \tau_x \cos(n, z)],$$
$$p_z = -[\tau_y \cos(n, x) + \tau_x \cos(n, y) + \nu_z \cos(n, z)],$$

et ces termes sont infinis dans la quasi-onde si $\nu_x, \ldots, \tau_z$ le sont. Ce résultat est inadmissible si les pressions avant et après l'onde sont finies.

Les considérations précédentes *ne sont pas une démonstration rigoureuse* du fait que $\nu_x, \ldots, \tau_z$ (ou A_x, A_y, A_z, B_x, ...) ne sont pas infinis au passage de la quasi-onde. On en trouvera une dans les *Recherches sur l'Hydrodynamique* de M. Duhem. Nous n'avons eu d'autre but, dans ce qui précède, que de mettre en évidence quelques faits physiques se rattachant au fait en question.

Nous admettrons donc que, pour qu'on puisse observer dans un fluide une quasi-onde de choc, il faut que $\nu_x, \ldots, \tau_z$ ne soient pas infinis quand $\frac{\partial u}{\partial x} \cdots$ le sont. Cela peut tenir à la manière dont ces dérivées entrent dans les expressions de $\nu_x, \ldots, \tau_z$. Mais cela peut tenir aussi au fait que le fluide est *excessivement peu visqueux*. Considérons en

effet la forme classique des fonctions $\nu_x, \ldots, \tau_z$, étant entendu que cette forme n'est choisie qu'à titre d'exemple et que ce que nous en dirons pourra s'appliquer à bien d'autres cas [1] :

$$\nu_x = -\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - 2\mu\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\nu_y = -\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - 2\mu\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\nu_z = -\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - 2\mu\frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\tau_x = -\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right),$$

$$\tau_y = -\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\right),$$

$$\tau_z = -\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

Avec ces valeurs, les coefficients A_x, A_y, A_z, B_x, ... deviennent des sommes de termes de la forme

$$\lambda A' \frac{\partial^2 x}{\partial a\, \partial t};$$

λ pouvant être remplacé par μ et $\frac{\partial^2 x}{\partial a\, \partial t}$ par une autre dérivée première de $\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t}$; A' étant fonction des dérivées premières de x, y, z, lesquelles sont supposées finies dans la quasi-onde.

Si λ, μ étaient finis, $\lambda A' \frac{\partial^2 x}{\partial a\, \partial t}$ serait infini pour $\frac{\partial^2 x}{\partial a\, \partial t}$ infini. *Mais les fluides naturels sont très peu visqueux;* λ et μ peuvent alors être considérés comme des quantités très petites; $\lambda A' \frac{\partial^2 x}{\partial a\, \partial t}$ ne devient sensible que quand $\frac{\partial^2 x}{\partial a\, \partial t}$ est très grand de l'ordre de $\frac{1}{\lambda}$. Dans une quasi-onde d'épaisseur h, ladite épaisseur étant de l'ordre de λ, l'expres-

---

[1] Il est bien entendu que les λ, μ des formules qui suivent n'ont aucun rapport avec les λ, μ, ν du Chapitre I.

sion $\lambda A' \frac{\partial^2 x}{\partial a \, \partial t}$ restera finie comme il faut qu'elle le soit pour qu'une telle quasi-onde soit possible. Le travail *réel* de la viscosité pour un élément de masse unité traversé par l'onde sera

$$\int_t^{t+\theta} \lambda A \frac{\partial^2 x}{\partial a \, \partial t} \frac{\partial^2 x}{\partial a \, \partial t} dt + \ldots;$$

il sera fini tout comme la variation d'entropie et il ne pourra être négligé devant celle-ci. Pour exprimer que le fluide est animé d'un mouvement adiabatique, il ne faudra pas écrire que l'entropie est constante, il ne faudra pas employer l'équation [(20) I] sans modifier le terme $r_\rho \frac{\partial \rho}{\partial t}$; dès lors il n'y aura plus incompatibilité entre cette équation et l'équation (17).

Mais il est important de remarquer que, partout où $\frac{\partial^2 x}{\partial a \, \partial t} \cdots$ ne sont pas très grands, la viscosité est négligeable, de sorte que, *en tout point situé en dehors de l'onde de choc,* on peut appliquer les équations du mouvement des fluides non visqueux. On peut notamment parler de *pression en un point;* ces mots ont certainement un sens.

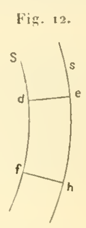
Reste à savoir maintenant si l'on peut appliquer les raisonnements des nos **1-3** aux quasi-ondes et par suite parvenir aux formules (14), (15), (16), (17), pour exprimer les lois de leur propagation. Il est facile de voir que oui, les pressions p_1 et p_2 étant les pressions, bien définies d'après ce que nous venons de dire, immédiatement en avant et en arrière de la quasi-onde. Il y a un seul point délicat. Pour que les démonstrations des nos **3** et **4** restent valables, il faut que l'épaisseur de la quasi-onde soit entièrement contenue dans la longueur $bb_1 = dP_1$ (*fig.* 9) et soit même négligeable vis-à-vis d'elle. Il faut donc que cette épaisseur et, par conséquent, λ et μ soient assez petits pour qu'on puisse les considérer comme des infiniment petits du second ordre au moins.

10. Il peut y avoir une seconde raison qui explique pourquoi la loi dynamique d'Hugoniot remplace, à la traversée d'une quasi-onde très peu épaisse, la loi adiabatique ordinaire. Il se peut en effet que, dans

cette traversée, les particules subissent des transformations qui ne soient pas adiabatiques.

Soit, dans le champ de Lagrange, à l'instant t, Ss la quasi-onde d'épaisseur h. La quantité h est *très petite;* nous ne disons pas infiniment petite; c'est par un simple *procédé de calcul* que nous la considérerons plus tard comme infiniment petite, et pour le moment il

Fig. 12.



s'agit précisément de voir ce que donne ce procédé de calcul. Considérons une masse limitée *à l'instant t* par deux portions finies df et eh des surfaces S et s et par un cylindre normal de, fh.

Étudions la chaleur reçue par cette masse pendant le temps θ *très petit* que la surface S va mettre à passer de df en eh. Pendant ce temps, df sera toujours en dehors de la quasi-onde et eh toujours en dedans. Les particules constitutives de la masse subiront des transformations finies; la chaleur reçue pourra donc être au plus de l'ordre de grandeur de la masse, soit de l'ordre de grandeur de h [1]. Évaluons maintenant la quantité versée par conductibilité et exprimons qu'elle est au plus, en effet, de cet ordre de grandeur.

Considérons la normale Λ à la surface $\delta\varepsilon\varphi\eta$ qui limite à chaque instant, dans le champ d'Euler, la masse $defh$, cette normale étant prise vers l'extérieur. La chaleur reçue par conductibilité est

$$\sum_{\substack{\text{Surface} \\ \delta\varepsilon\varphi\eta}} ds \int_t^{t+\theta} K \frac{dT}{d\Lambda}\, dt.$$

[1] Voir ce que nous avons dit à l'article précédent sur cette chaleur. Nous avons admis qu'en effet elle ne pouvait pas être très grande par rapport à h. On le démontre en prenant la question comme M. Duhem.

Prenons la partie de cette intégrale relative à la surface $\varepsilon\eta$; comme nous supposons une variation brusque de T à la traversée de la quasi-onde, $\frac{dT}{dx}$ y est très grand de l'ordre de $\frac{1}{h}$. Cette partie donne donc, dans l'intégrale, un contingent de l'ordre de $K\frac{1}{h}\theta$ ou de

$$\frac{K}{D},$$

D désignant la vitesse de la quasi-onde dans le champ de Lagrange $\left(\theta\text{ est en effet de l'ordre de }\frac{h}{D}\right)$. Il est évident d'ailleurs que les autres parties de l'intégrale sont très petites par rapport à celle-là. *Par conséquent, il faut que* $\frac{K}{D}$ *soit infiniment petit au moins de l'ordre de* h. *Les quasi-ondes ne peuvent donc se présenter que dans les gaz très peu conducteurs.*

C'est le cas des gaz naturels et il n'y a pas à s'étonner que ces gaz puissent présenter des quasi-ondes soumises aux lois (14), (15), (16), (17). Mais il est intéressant de remarquer que, par suite de la présence de D au dénominateur de $\frac{K}{D}$, un même gaz peut être considéré comme très peu conducteur quand on étudie des propagations rapides et comme bon conducteur au contraire quand on étudie des propagations lentes.

Supposons h de l'ordre de $\frac{K}{D}$ exactement. La chaleur mise en jeu par conductibilité dans le temps θ est alors de l'ordre de la masse $defh$. Dans le même temps, la masse subit une transformation finie. Cette transformation peut-elle ne pas être adiabatique, c'est-à-dire peut-elle absorber une quantité de chaleur de l'ordre de grandeur de la masse? Évidemment oui, puisque la conductibilité peut lui fournir ce qui est nécessaire.

On s'explique donc maintenant pourquoi la loi [(20) I] n'est pas applicable à la traversée d'une quasi-onde.

Cela n'empêche pas d'ailleurs la démonstration du nº 4 d'être encore exacte. Dans cette démonstration, l'épaisseur de la quasi-onde reste tout le temps à l'intérieur de la longueur $bb_1 = dP_1$. L'expres-

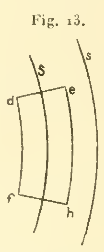
sion $\frac{dT}{dA}$ est finie en tout point de la surface $\beta\gamma\beta_1\gamma_1$, sauf peut-être dans la région négligeable où la quasi-onde coupe $\beta\beta_1$ et $\gamma\gamma_1$. La chaleur mise en jeu par la conductibilité

$$\sum_{\text{surface } \beta\gamma\beta_1\gamma_1} ds\, K \frac{dT}{dA} \frac{dP_1}{D}$$

est très petite par rapport à $ds\, dP_1$, c'est-à-dire par rapport à la masse bb_1cc_1. Elle est donc négligeable.

11. Dans le cas où l'onde sépare toujours les mêmes masses de matière, le n° **8** tombe en défaut et il n'apparaît pas aussi nécessairement que toute onde doit être en réalité une quasi-onde. Il est toutefois tout naturel de faire encore cette hypothèse pour voir si l'on peut en tirer quelques renseignements. Il est facile alors de montrer que, pour qu'il existe et qu'il subsiste pendant un temps fini t une quasi-onde d'épaisseur h avec variation brusque de température, il est nécessaire *que* $\frac{Kt}{h}$ *soit infiniment petit au moins de l'ordre de* h. On peut le

Fig. 13.



voir directement en raisonnant comme au numéro précédent sur une masse $defh$ disposée comme l'indique la figure par rapport à la quasi-onde et envisagée pendant le temps t. On peut aussi voir dans ce cas la limite du précédent, D tendant vers zéro.

Ce théorème s'applique aux cas d'expérience qui ont été signalés dans le n° **7**.

12. Tout ce qui précède, qu'il soit relatif à la viscosité ou à la con-

ductibilité, s'applique quand le fluide contient une variable chimique. Il faut ajouter alors au travail de la viscosité relative à la variable ρ un terme $\varphi\,\delta\alpha\,dm$. La quantité φ ne peut devenir infinie à la traversée de la quasi-onde; en effet, on a toujours

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha} = \varphi$$

et il n'y a aucune raison pour que $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha}$ devienne infini. Le travail de la viscosité φ sera négligeable au passage de l'onde si α n'y varie pas sensiblement. Mais il est très important de remarquer que nos raisonnements reposent sur le théorème des quantités de mouvement, qui est indépendant des forces intérieures (langage de la Mécanique classique) ou de la variation du potentiel interne (langage de la Thermodynamique) et sur l'équation de l'équivalence entre la chaleur et le travail, qui s'accommode parfaitement d'une variation de composition chimique. Rien donc n'y suppose que la variable α ne soit pas modifiée d'une quantité finie au passage de la quasi-onde; elle peut l'être si le corps étudié présente, comme les corps violemment explosifs, des $\frac{\partial \alpha}{\partial t}$ très grands. Dans ce cas, on peut invoquer un second argument pour prouver que φ ne devient pas infini dans la quasi-onde; il suffit de raisonner sur φ comme plus haut sur ν_x, ...; et ce raisonnement prouve en outre que, dans ce cas, le travail de la viscosité φ au passage de l'onde est de même ordre que la variation d'entropie.

Ainsi donc, qu'il y ait ou qu'il n'y ait pas discontinuité dans la variable α, nous pouvons, en vertu de tout ce qui précède, étudier la propagation des quasi-ondes dans les fluides très peu visqueux et très peu conducteurs de la nature en raisonnant avec le même langage que s'il s'agissait de fluides parfaits, rigoureusement non conducteurs, et d'ondes véritables. C'est ce que nous ferons dans la suite de ce Mémoire où nous appliquerons à ce problème les résultats des n^{os} **1** à **7**.

Bien que nous ayons, dans le présent numéro, employé la notion de potentiel interne, il est bien évident que ce que nous avons dit en est à peu près complètement indépendant.

§ 2. — Ondes planes. Condition pour qu'une onde de choc se propage sans altération.

15. Revenons aux expériences de M. Le Chatelier qui ont si bien défini l'onde explosive. Laissons de côté la période d'établissement de cette onde, où la flamme avance avec une vitesse variable, et considérons l'onde explosive proprement dite. Nous avons dit qu'elle apparaissait comme la réunion d'une flamme et d'une onde de choc. Évidemment, on ne peut pas dire que le fait soit rigoureusement démontré, mais il ressort assez bien des expériences pour qu'il soit intéressant de l'admettre à titre d'hypothèse et d'en suivre les conséquences. C'est la manière habituelle de procéder de la Physique mathématique.

C'est dans un milieu en repos que les expérimentateurs provoquent l'onde explosive. Quand celle-ci se propage, le fluide qui la précède est-il encore en repos? Les expériences exécutées sur les tubes ouverts ou fermés (¹) portent à penser que le mouvement du gaz en avant de l'onde de choc est tout à fait négligeable, puisque ce n'est qu'au voisinage des extrémités que la propagation subit des perturbations. Dès lors, si le gaz a une vitesse $\overline{u_1} + \overline{v_1} + \overline{w_1}$ avant l'onde de choc, cette vitesse est très faible par rapport à la vitesse de propagation de l'onde explosive, de sorte qu'il est tout naturel de raisonner, en première approximation, en considérant l'onde explosive *comme une onde de choc accompagnée d'une flamme et se propageant dans un milieu en repos*. C'est ce que nous ferons.

Plaçons-nous dans le cas des ondes planes parallèles au plan yz. L'état de repos initial est supposé homogène. C'est lui que nous prendrons pour champ de Lagrange. Le mouvement 1 est donc défini par

$$(28) \qquad x_1 = a, \qquad u_1 = 0, \qquad \rho_1 = r = \text{const.}, \qquad T_1 = \text{const.},$$

et l'on a

$$L = 1, \qquad M = 0, \qquad N = 0.$$

(¹) BERTHELOT, *De la force des matières explosives*, p. 134.

Les vitesses $\frac{dP}{dt}$, $\frac{dH}{dt}$, $\frac{d\varpi_1}{dt}$ de l'onde explosive sont égales entre elles; au contraire $\frac{d\varpi_2}{dt}$ n'est pas égale à ces trois premières.

L'expérience montre que $\frac{dH}{dt}$, et, par suite, $\frac{dP}{dt}$, est uniforme. C'est là un point capital sur lequel il importe d'insister. Les expériences n'ont jamais porté sur de très grandes longueurs de tube (au plus 42^m) et l'on peut se demander si la constance de la vitesse n'est pas une apparence due au fait que l'intervalle de temps étudié est très faible. Il nous semble que cette manière de voir doit être écartée. L'uniformité de la vitesse se caractérise nettement parce qu'elle s'oppose à la variabilité observée, pendant des intervalles de temps comparables, dans les phénomènes suivants :

1° Propagation de la flamme pendant la période d'établissement de l'onde explosive ([1]);

2° Propagation des ondes de choc dans les fluides sans variable chimique ([2]);

3° Propagation de la détonation dans un milieu dont la transformation chimique ne donne pas uniquement des produits gazeux ([3]).

Nous connaissons donc toute une série de phénomènes analogues à l'onde explosive des gaz pour lesquels les longueurs des tubes servant aux expériences sont suffisantes pour déceler la variation de la vitesse. Si cette variation ne se retrouve pas dans l'onde explosive se propageant dans les mélanges gazeux, c'est donc bien qu'il y a là quelque chose qui mérite d'être pris en considération. Il est donc légitime de prendre l'hypothèse de la propagation uniforme, suggérée par les faits, comme base d'un essai de théorie des phénomènes.

Nous sommes ainsi conduits à nous demander à quelle condition une onde de choc peut se propager avec une vitesse uniforme dans le mouvement 1 caractérisé par (28).

([1]) Le Chatelier, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CXXX, p. 1755.

([2]) Vieille, *Étude sur le rôle des discontinuités*....

([3]) Berthelot et Le Chatelier, *Sur la vitesse de détonation de l'acétylène* (*Annales de Chimie et de Physique*, 7e série, t. XX, 1900, p. 15).

14. Le mouvement qui suit l'onde de choc étant désigné par l'indice 2, les formules (15), (17), (18) donnent

$$
(29)\quad \begin{cases}
r\dfrac{d\mathrm{P}}{dt} = \dfrac{p_2 - p_1}{u_2 - u_1}, \\[2ex]
\dfrac{(p_1 + p_2)(\rho_1 - \rho_2)}{2} + \rho_1\rho_2(\mathrm{U}_2 - \mathrm{U}_1) = 0, \\[2ex]
\left(\dfrac{d\mathrm{P}}{dt}\right)^2 = \dfrac{\rho_1\rho_2}{r^2}\,\dfrac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1}.
\end{cases}
$$

Pour que $\frac{d\mathrm{P}}{dt}$ $\left(\text{ou } \frac{d\Pi}{dt} \text{ qui lui est égal}\right)$ soit constant, il suffit évidemment que le front de l'onde soit toujours identique à lui-même, c'est-à-dire que, sur ce front, les quantités ρ_2, α_2, T_2, u_2 aient constamment la même valeur. Cette condition, toutefois, n'est pas toujours nécessaire, car, $\frac{d\mathrm{P}}{dt}$ étant censé connu ainsi que ρ_1, u_1, α_1, T_1, les trois équations (29) ne suffisent pas pour déterminer ρ_2, α_2, T_2, u_2; mais elle l'est si le fluide est sans variable chimique; elle l'est aussi encore, comme on le verra plus loin, dans certains cas où la variable chimique existe. Bornons-nous à étudier la constance de $\frac{d\mathrm{P}}{dt}$ quand elle résulte de celle des valeurs de ρ_2, α_2, T_2, u_2 sur le front de l'onde.

15. Dans le mouvement 2, p, ρ, u sont des fonctions de a et de t et les équations [(2) I], [(18) I] se réduisent, pour les ondes planes, et si l'on suppose nulle la force $\overline{\mathrm{X}} + \overline{\mathrm{Y}} + \overline{\mathrm{Z}}$, à

$$
(30)\quad \begin{cases}
\rho = \dfrac{r}{\dfrac{\partial x}{\partial a}}, \\[2ex]
\dfrac{\partial p}{\partial a} = -r\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2}.
\end{cases}
$$

ρ étant une fonction, d'ailleurs inconnue, de a et de t, on peut considérer t comme une fonction de ρ et de a — *le raisonnement est en défaut si la densité d'un élément déterminé ne varie pas avec le temps* — et, par suite, p comme une fonction, en général inconnue a

priori, de ρ et de a :

$$p = \varpi(\rho, a).$$

La seconde équation (30) s'écrit alors

$$(31) \qquad \frac{\partial \varpi}{\partial \rho} \frac{\rho^2}{r^2} \frac{\partial^2 x}{\partial a^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varpi}{\partial a} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}.$$

Mais on peut écrire

$$dp = \frac{\partial p}{\partial a} da + \frac{\partial p}{\partial t} dt, \quad dp = \frac{\partial \varpi}{\partial a} da + \frac{\partial \varpi}{\partial \rho} d\rho, \quad d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial a} da + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt.$$

Ces trois relations apprennent, par la théorie du changement de variables, que

$$(32) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \varpi}{\partial a} &= \frac{1}{\frac{\partial \rho}{\partial t}} \left(\frac{\partial p}{\partial a} \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\partial \rho}{\partial a} \frac{\partial p}{\partial t} \right), \\ \frac{\partial \varpi}{\partial \rho} &= \frac{1}{\frac{\partial \rho}{\partial t}} \frac{\partial p}{\partial t}. \end{aligned} \right.$$

Or, au front de l'onde, p, ρ, u restent constants. C'est dire qu'ils ne varient pas quand on augmente t de dt et a de $d\text{P}$. Donc

$$(33) \qquad \frac{d\text{P}}{dt} = -\frac{\frac{\partial p}{\partial t}}{\frac{\partial p}{\partial a}} = -\frac{\frac{\partial \rho}{\partial t}}{\frac{\partial \rho}{\partial a}} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial t}}{\frac{\partial u}{\partial a}}.$$

Rapprochées de (32), ces formules montrent que, *sur le front de l'onde*, $\frac{\partial \varpi}{\partial a}$ est nul et, par suite, sur le front de l'onde, (31) s'écrit

$$(34) \qquad \frac{\partial \varpi}{\partial \rho} \frac{\rho^2}{r^2} \frac{\partial^2 x}{\partial a^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}.$$

Combinons (33) et (34), il vient :

$$\left(\frac{d\text{P}}{dt}\right)^2 = \frac{\frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial t}}{\frac{\partial \rho}{\partial a} \frac{\partial u}{\partial a}} = \frac{\frac{\partial^2 x}{\partial a\, \partial t} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}}{\frac{\partial^2 x}{\partial a^2} \frac{\partial^2 x}{\partial a\, \partial t}} = \frac{\rho^2}{r^2} \frac{\partial \varpi}{\partial \rho}.$$

Par conséquent la condition pour que l'onde de choc avance avec un front toujours identique à lui-même et, par suite, avec une vitesse uniforme, peut s'écrire

$$(35) \qquad \frac{\rho_1\rho_2}{r^2}\frac{p_2-p_1}{\rho_2-\rho_1}=\frac{\rho_2^2}{r^2}\left(\frac{\partial\varpi}{\partial\rho}\right)_2=\frac{\rho_2^2}{r^2}\frac{\frac{\partial p_2}{\partial t}}{\frac{\partial\rho_2}{\partial t}}.$$

§ 3. — Les gaz sans variable chimique.

Les gaz parfaits [1]. — **16.** Nous commencerons par appliquer cette condition aux gaz *parfaits purs,* sans variable chimique, les mouvements étant supposés *adiabatiques.* Dans ce cas, l'expression

$$\frac{\rho_2}{r}\sqrt{\left(\frac{\partial\varpi}{\partial\rho}\right)_2}$$

est la vitesse du son calculée par la formule de Laplace pour le milieu dans l'état où il se trouve en arrière du front de l'onde. Désignons-la pour abréger par E_2. Le gaz étant parfait,

$$E_2=\frac{1}{r}\sqrt{\gamma p_2\rho_2}.$$

Désignons de même par D la vitesse $\frac{\sqrt{\rho_1\rho_2}}{r}\sqrt{\frac{p_2-p_1}{\rho_2-\rho_1}}$ de l'onde de choc et comparons D et E_2.

$D - E_2$ a le signe de

$$\rho_1\frac{p_2-p_1}{\rho_2-\rho_1}-\gamma p_2,$$

ou encore, en tenant compte de la formule (27) et de ce que p_2 est positif, celui de

$$\gamma\frac{(\gamma+1)(\rho_1-\rho_2)}{(\gamma+1)\rho_2-(\gamma-1)\rho_1}.$$

---

[1] *Remarques sur la propagation des percussions dans les gaz* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* 27 juin 1904).

La formule (27), où p_2 et p_1 sont positifs, nous apprend que

$$(\gamma+1)\rho_2-(\gamma-1)\rho_1$$

est positif. Donc $D-E_2$ a le signe de $\rho_1-\rho_2$.

Disons en passant qu'on peut de même comparer D à E_1, vitesse du son dans le milieu qui précède immédiatement l'onde de choc, et voir que E_1-D a le signe de $\rho_1-\rho_2$.

La condition (35) n'est donc pas vérifiée ici, car $\rho_1-\rho_2$ est forcément différent de zéro. Le mouvement 1 ne pourra pas se propager dans le repos sans s'altérer.

17. Mais il est un cas où nous pouvons pousser plus loin la discussion.

Les calculs du paragraphe 2 deviennent illusoires quand ρ_2 est constant pour un même élément matériel. C'est le cas rencontré par Hugoniot en étudiant l'onde de choc qui se propage dans un gaz remplissant, en repos, un cylindre indéfini d'un côté, fermé de l'autre par un piston, quand le piston prend brusquement et conserve indéfiniment la vitesse V. Il est facile de vérifier que le mouvement 2 est représenté par

$$x_2=(H+1)a+Vt+K.$$

C'est là, en effet, une solution de (30) et d'autre part les formules (29) montrent qu'elle est compatible avec le repos (28). La vitesse de l'onde est $D=-\frac{V}{H}$.

La vitesse du piston étant restée égale à V pendant un certain temps, imaginons qu'à partir d'un certain instant elle se mette à changer, *mais non brusquement*. Un nouveau mouvement 3 prend naissance, qui va se propager dans 2 par une onde *ordinaire* animée de la vitesse E_2. On peut répéter ici le raisonnement du n° **30** du Chapitre II, et voir que le mouvement 3, représenté dans l'espace des a, t, x, est une surface développable. Supposons encore que le point représentatif n'en traverse pas l'arête de rebroussement. Il ne se produit alors aucune discontinuité dans le mouvement 3, et il avance sans altération dans le mouvement 2. Mais la vitesse E_2 est différente de D et dès lors deux cas sont à distinguer.

Premier cas. — L'onde de choc qui sépare 2 de 1 est une onde dilatée : $\rho_2 < \rho_1$. Dès lors $E_2 < D$. Les deux ondes D et E_2 s'éloignent de plus en plus l'une de l'autre. L'onde D progresse avec une vitesse constante, mais en arrière l'ensemble des mouvements 2 et 3 qui la suivent se modifie par le fait que le mouvement 2 intéresse une portion progressivement croissante du gaz.

Deuxième cas. — L'onde D est comprimée : $\rho_2 > \rho_1$. Alors $D < E_2$. L'onde E_2 tend à rattraper l'onde D. Une fois qu'elle l'aura atteinte, on aura une onde de choc séparant 1 de 3, et 3 se propagera évidemment en s'altérant, par suite avec une vitesse variable. L'état du fluide en arrière du front de l'onde ne sera pas toujours le même; les divers éléments matériels s'engageront dans le mouvement 3 en partant d'états initiaux différents.

On peut supposer que l'intervalle de temps écoulé entre la prise, par le piston, de la vitesse V et la naissance du mouvement 3 est aussi petit qu'on veut; les considérations qui précèdent ne cessent pas de s'appliquer.

Nous allons voir maintenant que le second cas est probablement le seul possible.

18. Nous avons parlé du rôle de la viscosité dans les ondes de choc. Si ce que nous en avons dit est exact, il est nécessaire qu'au passage de l'onde le travail de la viscosité soit négatif, et que, par suite, puisque le mouvement est adiabatique, l'entropie spécifique y croisse.

Le rôle de la conductibilité, mis en évidence dans le n° **10**, ne fait que confirmer cette conclusion. Soit un système matériel formé de parties à des températures différentes, *entre lesquelles se font des échanges de chaleur par conductibilité;* ce système est en contact, par soudure, avec une source à température T'; on sait que si dQ désigne la chaleur *reçue* par ce système et s_i l'entropie d'une partie, on a

$$\frac{dQ}{T'} < \Sigma\, ds_i \text{ (1)}.$$

(1) C'est une expression du théorème de Potier et Pellat. Sur la manière dont nous comprenons cette inégalité, voir *Sur une inégalité essentielle dans la théorie de l'équilibre au contact d'une source* (*Procès-verbaux des séances de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 17 mars 1904).

Ce résultat s'applique si le système subit une transformation adiabatique, dQ étant nul. On peut donc l'appliquer au mouvement, pendant le temps dt, de la masse $bcb_1c_1 = dm$ (nº 5, *fig.* 9) et l'on voit que, pour ce temps et cette masse, Σs_i doit croître. Or, au début du temps dt, on peut prendre pour Σs_i l'expression $s_1 dm$, s_1 étant l'entropie spécifique dans l'état 1 ; à la fin on peut prendre $s_2 dm$, s_2 étant l'entropie spécifique dans l'état 2. On a donc

$$(36) \qquad s_2 - s_1 > 0.$$

La condition (36), que nous venons de rattacher aux considérations que nous avons présentées sur la viscosité et la conductibilité dans les quasi-ondes de choc, peut d'ailleurs, si l'on n'accepte pas ces considérations et si l'on veut en rester à la conception des ondes rigoureuses, être envisagée comme une HYPOTHÈSE très naturelle à faire, eu égard à l'irréversibilité du choc.

Essayons d'en tirer quelques conséquences.

Dans les gaz parfaits s est égal à $cLp - CL\rho$, c et C étant les chaleurs spécifiques sous volume constant et sous pression constante. Par suite $s_2 - s_1$ aura le signe de

$$\frac{p_2}{p_1} - \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^\gamma.$$

Tenons compte de (27) et du fait que $(\gamma+1) - (\gamma-1)\frac{\rho_2}{\rho_1}$ est toujours positif, en vertu de cette formule. On voit alors que $s_2 - s_1$ a le signe de

$$(\gamma-1)\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{\gamma+1} - (\gamma+1)\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^\gamma + (\gamma+1)\frac{\rho_2}{\rho_1} - (\gamma-1).$$

Cette expression est une fonction de $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ qui est nulle pour $\frac{\rho_2}{\rho_1} = 1$. Il est facile de voir, en prenant ses dérivées première et seconde, qu'elle est positive pour $\frac{\rho_2}{\rho_1} > 1$ et négative pour $\frac{\rho_2}{\rho_1} < 1$.

$s_2 - s_1$ a donc le signe de $\rho_2 - \rho_1$.

Nous arrivons ainsi à la conclusion suivante :

« *La propagation, suivant la loi d'Hugoniot, d'une onde de choc*

produisant une dilatation brusque ($\rho_2 < \rho_1$) *paraît contraire au principe de Carnot-Clausius. On ne peut observer que des ondes de choc produisant des compressions brusques* ($\rho_2 > \rho_1$). »

Ce résultat est à rapprocher de celui qu'a obtenu Hugoniot sur la naissance spontanée des ondes de choc dans les gaz. Nous faisons ce rapprochement un peu plus loin (**22**).

Combinons ce théorème avec ce que nous avons appris au n° **16**. Nous pouvons énoncer les propositions suivantes :

Dans un gaz parfait en repos, on ne peut observer, comme ondes de choc, que des ondes comprimées ($\rho_2 > \rho_1$). *Ces ondes se propagent avec une vitesse variable, inférieure à la vitesse du son dans le milieu immédiatement en arrière, mais supérieure à la vitesse du son dans le milieu immédiatement en avant.*

Dans cet énoncé, toutes les vitesses doivent être entendues par rapport à l'état initial constitué par le mouvement 1 représenté par (28) [1].

19. Il n'y a pas à s'étonner que l'application du principe de l'équivalence nous ait conduit à une théorie, celle qui est exprimée par les formules (14), (15), (16), (17), (18), parfois incompatible avec le principe de Carnot. On peut citer bien d'autres questions où il en est ainsi. Prenons, par exemple, la théorie du laminage d'un gaz parfait par un orifice étroit, en régime permanent. On y démontre, par le principe de l'équivalence, que la température ne varie pas dans l'opération. Mais ce résultat ne suppose nullement que le gaz passe de la plus forte à la plus faible pression. Si l'on invoque, au contraire, le principe de Carnot, celui-ci nous apprend que l'entropie doit croître, ce qui exige, pour un gaz parfait dont la température reste constante, que la pression diminue.

La même théorie du laminage fournit un exemple d'un phénomène irréversible où, par suite d'hypothèses simples et raisonnables, il est

[1] Nous n'avons pas besoin d'insister sur le fait que certaines parties de l'énoncé ne supposent nullement le mouvement 1 représenté par (28).

possible de se passer de la connaissance de la viscosité pour calculer l'état final auquel parvient le corps qui le subit. C'est là exactement ce qui arrive dans le problème des ondes de choc qui nous occupe : on y peut écrire la loi adiabatique d'Hugoniot, où la viscosité joue certainement un rôle, sans connaître cette viscosité [1].

Les gaz quelconques [2]. — **20.** Nous avons cherché à étendre à d'autres gaz qu'aux gaz parfaits les théorèmes qui précèdent. *Nous n'y sommes parvenus qu'en supposant que la discontinuité en* ρ *n'est pas trop forte.*

L'état du gaz est défini par ρ et T. L'entropie spécifique est une fonction de ρ et de T :

$$s = s(\rho, T).$$

On peut, par le moyen de cette équation, remplacer partout la variable T par la variable s. L'énergie interne $U(\rho, T)$ devient ainsi une fonction $\varepsilon(\rho, s)$, et l'on sait que l'on a

$$(37) \qquad p = \rho^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}, \qquad T = \frac{\partial \varepsilon}{\partial s}.$$

La loi adiabatique dynamique d'Hugoniot s'écrit :

$$(38) \qquad (p_1 + p_2)(\rho_1 - \rho_2) + 2\rho_1 \rho_2 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) = 0.$$

ρ_1 et s_1 étant donnés, une discontinuité sera caractérisée par la valeur de ρ_2 en arrière de l'onde et (38) donne le s_2 correspondant. s_2 est donc une fonction de ρ_2 donnée par (38) et qui se réduit évidemment à s_1 pour $\rho_2 = \rho_1$. On peut donc écrire

$$s_2 - s_1 = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{ds_2}{d\rho_2} d\rho_2 = (\rho_2 - \rho_1)\left(\frac{ds_2}{d\rho_2}\right)_m,$$

---

[1] On pourrait citer bien d'autres exemples de ce fait : le théorème de Lazare Carnot sur le choc des corps solides, le théorème de Borda Bélanger en hydraulique pratique, etc.

[2] *Remarques sur la loi adiabatique d'Hugoniot* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 14 novembre 1904).

$\left(\frac{ds_2}{d\rho_2}\right)_m$ étant une valeur moyenne. Il est bien certain que, *si la discontinuité n'est pas trop forte*, $\left(\frac{ds_2}{d\rho_2}\right)_m$ a le même signe que $\frac{ds_2}{d\rho_2}$ calculé pour la valeur limite ρ_2. On aura donc

$$s_2 - s_1 = k^2(\rho_2 - \rho_1)\frac{ds_2}{d\rho_2}.$$

Or $\frac{ds_2}{d\rho_2}$ se calcule facilement par (38), en tenant compte de (37). On trouve

$$\frac{ds_2}{d\rho_2} = -\frac{(\rho_2 - \rho_1)}{2\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial s_2} + \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right)\frac{\partial p_2}{\partial s_2}} \frac{r^2}{\rho_2^3\rho_1}\left(\frac{\rho_1\rho_2}{r^2}\frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} - \frac{\rho_2^2}{r^2}\frac{\partial p_2}{\partial \rho_2}\right).$$

Et, par suite,

$$s_2 - s_1 = -\frac{k'^2}{2T_2 + \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right)\frac{\partial p_2}{\partial s_2}}(D^2 - E_2^2).$$

Or, si la discontinuité n'est pas trop grande, $2T_2$ donne son signe au dénominateur et ce signe est positif. Admettons, comme une conséquence du principe de Carnot-Clausius, que $s_2 - s_1$ doit être positif. On voit qu'il faut pour cela que $E_2 > D$. *La vitesse de l'onde de choc est donc plus faible que celle du son dans le fluide qui la suit.*

Dans l'équation (38), considérons maintenant ρ_2 et s_2 comme donnés et ρ_1 et s_1 comme variables, s_1 étant une fonction de ρ_1. Par un raisonnement tout à fait identique à celui qui précède, on montrera que $D > E_1$. *L'onde de choc va plus vite que le son dans le milieu qui la précède.*

Recherchons maintenant si ce sont les dilatations ou les condensations qui se propagent, comme cela doit être, en donnant une variation d'entropie positive. Considérons, dans (38), ρ_1 et s_1 comme données et ρ_2 et s_2 comme variables, le second étant fonction du premier. Calculons les valeurs que prennent les dérivées successives $\frac{ds_2}{d\rho_2}$, $\frac{d^2s_2}{d\rho_2^2}$, $\frac{d^3s_2}{d\rho_2^3}$ quand ρ_2 tend vers ρ_1. Il est facile de voir que $\frac{ds_2}{d\rho_2}$ et $\frac{d^2s_2}{d\rho_2^2}$

tendent vers zéro, et $\frac{d^3 s_2}{d\rho_2^3}$ vers la valeur

$$\frac{1}{2\rho_1^4 T_1} \frac{\partial\left(\rho_1^2 \frac{\partial p_1}{\partial \rho_1}\right)}{\partial \rho_1}. \tag{39}$$

Admettons ici que cette expression est positive; nous discuterons ce point plus loin. Il suit de là que, à partir de $\rho_2 = \rho_1$, s_2 varie comme ρ_2 et que, par suite, si l'on se borne aux discontinuités qui ne sont pas trop fortes, ce sont les ondes condensées ($\rho_2 > \rho_1$) qui seules donnent une variation d'entropie positive. *Ce sont donc les ondes condensées seules que l'on peut observer.*

21. Les valeurs nulles que nous venons de trouver pour les limites de $\frac{ds_2}{d\rho_2}$ et $\frac{d^2 s_2}{d\rho_2^2}$ montrent que la loi d'Hugoniot a pour limite, quand la discontinuité tend vers zéro, la loi adiabatique ordinaire. Ce n'était pas évident *a priori*, la démonstration de la formule d'Hugoniot tombant en défaut quand

$$L(u_1 - u_2) + M(v_1 - v_2) + N(w_1 - w_2) = 0.$$

Comme conséquence, on peut traiter la propagation des ondes ordinaires comme celle des ondes de choc à discontinuité infiniment petite, et inversement, dans l'étude de la propagation des ondes de choc à discontinuité infiniment petite, on peut admettre la loi adiabatique ordinaire. Cette dernière remarque trouverait son application dans la théorie, donnée par M. Boussinesq, de la propagation du choc dans une barre élastique.

22. Discutons maintenant le signe de l'expression (39), c'est-à-dire celui de $\frac{\partial\left(\rho_1^2 \frac{\partial p_1}{\partial \rho_1}\right)}{\partial \rho_1}$.

Reportons-nous pour cela à l'étude, faite par Hugoniot, de la naissance spontanée des ondes de choc dans les mouvements adiabatiques provoqués, dans une colonne gazeuse homogène au repos, par la mise en branle du piston qui la ferme. Ainsi que nous l'avons exposé

(II, 50), il se forme une série de mouvements, représentés par des fonctions linéaires en a et t, se propageant les uns dans les autres par ondes dont la vitesse est celle qu'a le son dans l'état du fluide correspondant. Les ondes de choc naissent quand une de ces ondes rattrape la précédente, et pour cela il faut que les vitesses des ondes, rapportées au champ de Lagrange, soient de plus en plus fortes. Si le piston comprime le fluide, il faut donc, pour qu'une onde de choc naisse, que la vitesse du son croisse quand la densité croît. La naissance spontanée des ondes de choc condensées exige donc que $\frac{\rho^2}{r^2}\frac{\partial p}{\partial \rho}$, ou simplement, puisque r est constant, $\rho^2 \frac{\partial p}{\partial \rho}$ soit croissant avec ρ, c'est-à-dire que $\frac{\partial\left(\rho^2 \frac{\partial p}{\partial \rho}\right)}{\partial \rho}$ soit positif. Au contraire, la naissance spontanée d'une onde de choc dilatée exige que $\frac{\partial\left(\rho^2 \frac{\partial p}{\partial \rho}\right)}{\partial \rho}$ soit négatif.

Il est inutile de préciser ici s'il s'agit de l'indice 1 ou de l'indice 2, puisque, par l'hypothèse que les discontinuités sont faibles, on est assuré que le signe de $\frac{\partial\left(\rho^2 \frac{\partial p}{\partial \rho}\right)}{\partial \rho}$ est le même avec les deux indices.

Nous n'avons pas démontré que l'expression (39) est positive; nous avons simplement montré que *son signe est tel que les ondes de choc qui peuvent naître spontanément dans le fluide sont les seules qui, lorsqu'elles persistent, donnent, conformément au principe de Carnot-Clausius, une variation d'entropie positive au passage de l'onde* (¹).

Supposons, pour fixer les idées, (39) positif, et par suite possibilité de naissance d'ondes de choc condensées. S'il se forme dans le gaz une zone où la densité décroît très rapidement, les diverses ondes séparant les mouvements élémentaires dont il est question plus haut sont excessivement rapprochées. Mais, dans la suite du mouvement,

---

(¹) Les travaux d'Hugoniot sur la naissance spontanée des ondes de choc ne présentent pas une rigueur entière et M. Hadamard a consacré à ce sujet de longs développements (*loc. cit.*, p. 207 et suiv.). On peut néanmoins les invoquer au point de vue physique.

ces diverses ondes tendent à s'espacer; la zone, qui constitue une quasi-onde, tend à *s'étaler*. On comprend ainsi, dans une certaine mesure, pourquoi la théorie des n^{os} **1** à **5**, qui suppose que la quasi-onde persiste avec sa faible épaisseur, n'est pas applicable.

Pour le cas des gaz parfaits, il n'est pas douteux que (39) soit positif et que, par suite, les ondes condensées soient seules possibles. Les résultats ci-dessus sont même vrais quelle que soit l'amplitude de la discontinuité.

Faits d'expérience. — **25.** Les expériences de M. Vieille ont porté sur les gaz parfaits. Elles ont mis très nettement en évidence la variabilité de la vitesse de propagation des ondes de choc condensées; cette vitesse s'affaiblit très rapidement ([1]).

Ont-elles vérifié aussi l'impossibilité des ondes dilatées? Cela est moins sûr, mais assez probable. M. Vieille a tenté une fois de produire une onde de choc avec chute brusque de la pression à partir de 29^{atm} ([2]). L'installation expérimentale n'a pas permis de mesurer exactement la vitesse du front de l'onde. En effet, les enregistreurs de pression étaient calés dans la position correspondant à 25^{atm} et ne se déplaçaient pour enregistrer la pression que lorsque celle-ci avait baissé de 29^{atm} à 25^{atm}. Mais, selon M. Vieille lui-même, les résultats obtenus sont parfaitement compatibles avec l'idée qu'il n'y a pas véritablement onde de choc et que le front de l'onde progresse avec la vitesse du son. « La vitesse de propagation de la dépression finie $29 - 25 = 4^{atm}$, dit-il, est de 281^{m}. Mais la vitesse du front de l'onde qui, ainsi que nous l'avons vu, paraît devoir se propager sans discontinuité, pourrait être la vitesse normale du son, les grandes dilatations se propageant plus lentement que les dilatations infiniment petites. »

A la lecture du Mémoire de M. Vieille, voici ce que nous avons compris que ce savant entend par *la vitesse de la dépression finie* $29 - 25 = 4^{atm}$. Il mesure cette vitesse en comptant le temps écoulé entre la mise en mouvement des deux enregistreurs de pression, calés à 25^{atm} et distants d'une longueur connue. Mais la chute de pression

([1]) Vieille, *Étude sur le rôle des discontinuités*, ..., p. 212.
([2]) Vieille, *Étude sur le rôle des discontinuités*, ..., p. 245-246.

se continue au-dessous de 25^{atm} ; la pression descend à 15,7. Si donc il y a onde de choc, elle produit une variation brusque 29 — 15,7. Cela correspondrait, si les formules d'Hugoniot étaient applicables, à une vitesse de 258^m. Or la vitesse du front de l'onde est probablement supérieure à 281^m, d'après ce que nous venons de voir. Cette contradiction paraît s'accorder assez bien avec l'idée qu'il n'y a pas d'onde de choc dilatée. Au contraire, pour les ondes condensées, les formules d'Hugoniot sont parfaitement d'accord avec l'expérience : M. Vieille cite un cas où le calcul donne 600^m et l'observation 601^m,8 ([1]).

§ 4. — L'onde explosive. Première interprétation.

24. Venons au cas où le fluide est le siège d'une réaction chimique. Une première interprétation de l'onde explosive consiste à supposer qu'elle est constituée par une onde de choc au passage de laquelle la densité et la température subissent un changement brusque, mais non la variable α, la flamme suivant immédiatement après.

Cherchons à préciser cette interprétation. Il se peut que l'onde de choc ait pour seul effet d'amener le gaz jusqu'à sa température d'inflammation, auquel cas il est tout naturel que α ne varie pas dans la quasi-onde, le mélange n'y sortant pas de la région des faux équilibres. Il se peut aussi que, dans la traversée de la quasi-onde de choc, le gaz dépasse la température d'inflammation, mais que α n'y varie pas sensiblement, la vitesse de la réaction étant négligeable vis-à-vis de la vitesse de variation de ρ.

La température d'inflammation du mélange $H^2 + O$ est environ 555°. Admettons, ce qui ne peut être qu'une première approximation, que ce nombre est indépendant du degré de compression du mélange. Il est alors facile de calculer que l'onde de choc portant exactement le gaz à 555° a une vitesse de 1660^m par seconde. C'est beaucoup plus faible que la vitesse observée pour l'onde explosive. Il faut donc supposer que la température d'inflammation est dépassée à la traversée de l'onde.

25. Cette conclusion est confirmée par les remarques suivantes.

([1]) Vieille, *loc. cit.*, p. 253.

Cherchons à expliquer, par les considérations du paragraphe 2, l'uniformité de la vitesse de l'onde explosive. Il est facile, dans le cas présent, de voir que (35) prend la forme

$$(40)\quad \frac{\rho_1\rho_2}{r^2}\frac{p_2-p_1}{\rho_2-\rho_1}=\frac{\rho_2^2}{r^2}\left[\frac{\partial p_2}{\partial \rho_2}-\frac{r_{\rho_2}}{c_2}\frac{\partial p_2}{\partial \mathrm{T}_2}+\left(\frac{\partial p_2}{\partial \alpha_2}-\frac{r_{\alpha_2}}{c_2}\frac{\partial p_2}{\partial \mathrm{T}_2}\right)\frac{\eta_1 g(\rho_2, \alpha_2, \mathrm{T}_2)}{\frac{\partial \rho_2}{\partial t}}\right]$$

(le mouvement en arrière de l'onde est supposé adiabatique).

Supposons que la quasi-onde ne fasse que porter le fluide à la température d'inflammation. L'équation (40) suppose qu'en arrière du front de l'onde la réaction se produit; cela exige que $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ soit tel que le point représentatif de l'état du gaz pénètre dans la région de combinaison. Admettons qu'il en soit ainsi. Puisque nous sommes au voisinage de la surface des faux équilibres limites, il faut faire $g=0$ dans (40) qui devient

$$(41)\quad \frac{\rho_1\rho_2}{r^2}\frac{p_2-p_1}{\rho_2-\rho_1}=\frac{\rho_2^2}{r^2}\left(\frac{\partial p_2}{\partial \rho_2}-\frac{r_{\rho_2}}{c_2}\frac{\partial p_2}{\partial \mathrm{T}}\right)$$

et qui exprime alors, comme on devait s'y attendre d'ailleurs par II, **16** et **28**, l'égalité entre la vitesse de l'onde de choc et la vitesse du son dans le milieu qui la suit, calculée dans l'hypothèse où la variable chimique ne joue pas. Or on sait qu'une telle égalité est impossible ([1]), ce qui paraît bien écarter l'idée que l'onde de choc ne fait que porter le fluide à sa température d'inflammation.

Ajoutons un autre argument. Si, en arrière de l'onde, l'état du fluide est un état de faux équilibre limite, ρ_2, α_2, T_2 sont liés par

$$(42)\quad g(\rho_2, \alpha_2, \mathrm{T}_2)=0.$$

Il faut joindre à (41) et (42) la loi d'Hugoniot

$$(43)\quad (\rho_1-\rho_2)(p_1+p_2)+2\rho_1\rho_2(\mathrm{U}_2-\mathrm{U}_1)=0.$$

([1]) Nous supposons ici que nous avons affaire à des gaz parfaits, ou, si les gaz ne sont pas parfaits, à des discontinuités en ρ qui ne sont pas trop fortes (§ 3).

D'ailleurs α_2 est déterminé, puisqu'il est égal à α_1. Les trois équations (41), (42), (43) ne contiennent donc que deux inconnues. Il n'y a aucune raison pour qu'elles soient compatibles.

26. On est donc forcément conduit à supposer que la quasi-onde fait entrer le gaz dans la région de combinaison. Cela oblige à partir de (40) au lieu de (41) et supprime (42). Les relations (40) et (43) restent pour déterminer ρ_2 et T_2 et, par suite, la vitesse de l'onde peut se calculer, en fonction, il est vrai, de $\frac{\partial \rho_2}{\partial t}$.

A priori d'ailleurs, il n'y aucune impossibilité à ce que (40) soit vérifié. Pour les gaz parfaits $\frac{\rho_2^2}{r^2}\left(\frac{\partial p_2}{\partial \rho_2} - \frac{r_{\rho_2}}{c_2}\frac{\partial p_2}{\partial T}\right)$ est plus grand que $\frac{\rho_1\rho_2}{r^2}\frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1}$. Mais le terme $\frac{\rho_2^2}{r^2}\left(\frac{\partial p_2}{\partial \alpha_2} - \frac{r_{\alpha_2}}{c_2}\frac{\partial p_2}{\partial T_2}\right)\frac{\tau_1 g}{\frac{\partial \rho_2}{\partial t}}$ peut parfaitement être négatif.

Nous nous trouvons ainsi en présence d'une théorie assez complète de l'onde explosive, puisque nous pouvons calculer la vitesse de cette onde. Mais il faut insister ici sur deux caractères de cette théorie.

Calculons une discontinuité qui, se propageant dans le mélange $H^2 + O$ pris dans un état homogène à la température $T_1 = 273 + 10°$, aurait une vitesse de 2820^m par seconde, comme l'onde explosive. On trouve qu'il faut que $\rho_2 = 5,52\rho_1$, $T_2 = 1763°$. En unités C.G.S., le terme $\frac{\rho_1\rho_2}{r^2}\frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1}$ (qui se réduit, puisque $\rho_1 = r$, à $\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1}$), vaut donc $7,95 \times 10^{10}$ et le terme $\frac{\rho_2^2}{r^2}\left(\frac{\partial p_2}{\partial \rho_2} - \frac{r_{\rho_2}}{c_2}\frac{\partial p_2}{\partial T_2}\right)$ vaut $48,4 \times 10^{10}$. Pour que (40) soit vérifié, il faut que le terme $\frac{\rho_2^2}{r^2}\left(\frac{\partial p_2}{\partial \alpha_2} - \frac{r_{\alpha_2}}{c_2}\frac{\partial p_2}{\partial T_2}\right)\frac{\tau_1 g}{\frac{\partial \rho_2}{\partial t}}$ soit prépondérant.

De là deux conséquences importantes :

1° Comme certainement $\frac{\partial \rho_2}{\partial t}$ est très grand en arrière du front de l'onde, il faut que ηg soit lui-même très grand. C'est dire que la théorie est bien d'accord avec le fait d'expérience que l'onde explosive ne s'observe que dans les mélanges dont la réaction est très rapide. Remarquons toutefois qu'elle ne suppose pas la réaction si rapide qu'il

y ait lieu d'en venir aux hypothèses qui servent de définition aux corps *à réaction vive*.

2° La vitesse de l'onde dépend *beaucoup* de $\frac{\partial\rho_2}{\partial t}$. Cette conséquence de la théorie lui est tout à fait défavorable, car elle paraît contraire à l'expérience. La vitesse mesurée pour l'onde explosive a toujours été la même quel que soit le mode de mise de feu, c'est-à-dire quelle que soit la manière dont les gaz se détendent en arrière du front de l'onde. Elle a été la même aussi [1] que l'allumage ait été fait à une extrémité ouverte, à une extrémité fermée, ou au milieu d'un tube. Cette indifférence des conditions aux limites semble bien montrer que $\frac{\partial\rho_2}{\partial t}$ ne doit pas jouer un grand rôle dans l'expression de la vitesse.

C'est là une des raisons qui donneront, nous l'espérons, quelque intérêt à une seconde interprétation de l'onde explosive que nous développerons au paragraphe suivant.

27. Nous avons implicitement supposé, dans l'exposé qui précède, que le corps n'était pas *à réaction vive*. C'est que, en effet, les hypothèses relatives aux corps à réaction vive ne sont pas compatibles avec l'idée développée dans ce paragraphe.

Tout d'abord nous admettons que, pour les corps à réaction vive, le point représentatif de leur état ne séjourne *jamais* dans la région de combinaison et qu'il est rappelé instantanément sur la surface (a) par la violence de la réaction. Dans ces conditions, si nous voulons imaginer une quasi-onde de choc où α ne varie pas, ce qui est la base de notre interprétation actuelle, nous sommes obligés de supposer que la quasi-onde porte simplement le gaz à sa température d'inflammation et nous nous heurtons alors à la difficulté signalée à la fin du n° **24**.

Il y a d'ailleurs d'autres difficultés. Comme la surface (a) est très probablement atteinte en un point de la zone $A\varepsilon$, comme le mouvement en arrière de l'onde est très probablement adiabatique, la combustion doit sans doute se faire, par nos hypothèses, non pas suivant la loi de M. Duhem, mais bien instantanément, avec variation subite de α,

---

(1) BERTHELOT, *De la force des matières explosives*, p. 134.

ce qui est contraire à l'hypothèse que α reste constant dans la quasi-onde. Imaginons même que la zone $A\varepsilon$ n'existe pas et que le gaz brûle en arrière de l'onde en restant sur la surface $g = 0$. On retombe alors sur les difficultés du n° **25**, comme on va le voir.

En effet, le corps étant *à réaction vive*, si l'on veut exprimer par (35) la constance de la vitesse de l'onde, il est évident, le mouvement en arrière de l'onde étant supposé adiabatique, qu'il faut mettre à la place de $\left(\frac{\partial \varpi}{\partial \rho}\right)_2$ l'expression qui est au second membre de [(24) II]. On écrira donc, à la place de (41),

$$(44)\quad \frac{\rho_1\rho_2}{r^2}\,\frac{p_2-p_1}{\rho_2-\rho_1} = \frac{\rho_2^2}{r^2}\left[\frac{\partial p_2}{\partial \rho_2} - \frac{r_{\rho_2}}{c_2}\,\frac{\partial p_2}{\partial \mathrm{T}_2} + \left(\frac{\partial p_2}{\partial \alpha_2} - \frac{r_{\alpha_2}}{c_2}\,\frac{\partial p_2}{\partial \mathrm{T}_2}\right)\frac{r_{\rho_2}\dfrac{\partial g_2}{\partial \mathrm{T}_2} - c_2\dfrac{\partial g_2}{\partial \rho_2}}{c_2\dfrac{\partial g_2}{\partial \alpha_2} - r_{\alpha_2}\dfrac{\partial g_2}{\partial \mathrm{T}_2}}\right].$$

Ce n'est pas que, rigoureusement parlant, il y ait une différence quelconque entre ce cas et celui où nous avons écrit l'équation (41). Si, en arrière du front de l'onde, le point représentatif de l'état du fluide était *rigoureusement* situé sur la surface $g = 0$ et si nous voulions exprimer la constance *rigoureuse* de la vitesse, ce serait (41) qu'il faudrait écrire encore ici. Mais en arrière du front, le fluide n'est pas *rigoureusement* sur la surface $g = 0$, il est simplement *au voisinage*. Quand les courbes d'égale vitesse de réaction ne sont pas très resserrées auprès de cette surface, cela suffit pour que (40) se transforme en (41). Il n'en est pas de même dans le cas des corps à réaction vive, où un faible éloignement de la surface $g = 0$ donne une grande valeur à $\frac{\partial \alpha}{\partial t}$, c'est-à-dire à ηg de l'équation (40). C'est pour cela qu'il faut ici écrire (44) [1].

D'ailleurs les formules (42) et (43) subsistent. α_2 est déterminé et égal à α_1. On a alors trois équations (42), (43), (44) pour deux inconnues ρ_2 et T_2. Rien ne dit qu'elles soient compatibles.

En résumé donc, il ne faut pas songer à employer, dans l'interpré-

---

[1] Nous avons déjà présenté des considérations analogues dans le n° **22** du Chapitre II.

tation que nous venons de donner de l'onde explosive, les hypothèses qui servent de définition aux corps à réaction vive.

§ 5. — L'onde explosive. Deuxième interprétation [1].

Exposé de la théorie. — **28.** Nous supposerons que la quasi-onde de choc qui constitue l'onde explosive est telle que le gaz y est, non seulement porté à sa température d'inflammation, mais encore brûlé d'une façon notable.

Il faut pour cela que la vitesse de la réaction soit assez grande pour que la variable chimique varie d'une quantité finie à la traversée de la quasi-onde. Il semble bien que ce soit l'idée que se sont faite du phénomène les expérimentateurs qui l'ont découvert. Les calculs de M. Berthelot supposent implicitement une combustion complète et presque instantanée, et M. Vieille, cherchant à estimer quelle variation brusque de pression serait nécessaire pour donner à une onde de choc une vitesse égale à celle d'une onde explosive, fait dans cette variation deux parts, dont l'une est due à la réaction même. « La réaction décuplant la pression initiale, dit-il, il suffit que l'étincelle ou l'amorce initiale ait porté le mélange tonnant à une pression de 1^{kg} avant la réaction pour que le phénomène s'amorce d'emblée [2] ». Cette idée d'une vitesse de réaction très grande est d'ailleurs bien d'accord avec le fait que l'onde explosive n'a été observée que dans les mélanges très violents, et ce n'est pas la première fois que, dans la théorie des explosions, on suppose celles-ci instantanées.

Cette hypothèse se rattache naturellement à notre conception des corps *à réaction vive*. Dans la quasi-onde, où le gaz brûle, $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ est très grand en valeur absolue. Il faut, bien entendu, qu'il remplisse certaines conditions pour que la combustion se fasse effectivement, car il faut que le point représentatif ne pénètre pas dans la région des faux équilibres (I, 8). Supposons qu'il en soit ainsi. Alors de deux choses

---

[1] *Sur l'onde explosive* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 11 juillet 1904 et 13 mars 1905).

[2] VIEILLE, *loc. cit.*, p. 259.

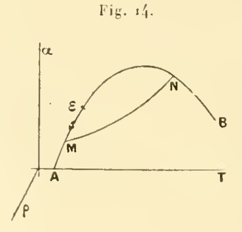
l'une : ou bien le point représentatif reste sur la surface $g = 0$, ou bien il pénètre à l'intérieur (I, 8). Dans le premier cas, la variation finie de ρ et T, qui se produit dans la quasi-onde, entraîne forcément une variation finie de α : sans cela, en effet, l'équation $g = 0$ et la loi de Hugoniot détermineraient les deux inconnues ρ_2 et T_2, d'où la conclusion, inadmissible, qu'une seule discontinuité, bien déterminée, pourrait se propager dans le fluide. Dans le second cas, *a fortiori* α varie-t-il d'une quantité finie puisque $\frac{\partial \alpha}{\partial t}$ est plus grand dans ce second cas que dans le premier.

En arrière de l'onde et juste au front, l'état ρ_2, α_2, T_2 vérifie toujours

$$g(\rho_2, \alpha_2, T_2) = 0. \tag{45}$$

C'est évident si, pendant la combustion qui s'est produite dans la quasi-onde, le point représentatif n'a pas quitté la surface (a). Dans le cas contraire, nous sommes logiquement conduits à cette HYPOTHÈSE

Fig. 14.



par notre conception des corps à réaction vive, aux termes de laquelle le point représentatif ne peut séjourner un temps appréciable dans la région de combinaison ; la réaction qui s'est produite dans la quasi-onde est alors représentée par une courbe telle que MN.

Peut-être trouvera-t-on que la conception des réactions instantanées n'est pas très bien d'accord avec les résultats fournis aux expérimentateurs par la méthode du refroidissement brusque. Mais nous ferons remarquer que le refroidissement brusque, employé seul, n'a jamais mis en évidence de bien fortes dissociations dans les mélanges suscep-

tibles de donner l'onde explosive. Si donc la totalité de la réaction n'est pas pratiquement instantanée dans ces mélanges, il n'est nullement contraire à l'expérience d'admettre que la plus grande partie l'est. Une théorie admettant une instantanéité totale est donc légitime en première approximation. Nous reviendrons d'ailleurs là-dessus (44).

29. Dans l'onde explosive, nous avons donc variation brusque de ρ, α, T. Nous avons déjà fait remarquer que la variation de α ne constituait pas un obstacle à l'application des formules du paragraphe 1. Nous devons donc écrire en particulier la loi d'Hugoniot,

$$(46)\qquad (p_1+p_2)(\rho_1-\rho_2)+2\rho_1\rho_2(U_2-U_1)=0.$$

30. Exprimons enfin, au moyen de (35), que l'onde se propage sans altération.

L'état du fluide en arrière de l'onde est un état de faux équilibre limite. La situation est donc analogue à celle du n° **25**, sauf les deux différences suivantes.

Tout d'abord nous pouvons très bien admettre que, en arrière de l'onde, le point représentatif de l'état du fluide pénètre dans la région des faux équilibres. Dans le n° **25** nous ne le pouvions pas, parce que cela aurait supprimé tout phénomène chimique, donc toute *onde explosive;* il n'en est pas de même dans notre interprétation actuelle où la réaction s'est produite dans la quasi-onde. Imaginons donc qu'il en soit ainsi; le mouvement 2 est alors un mouvement sans variation de α, et la vitesse qu'il faut mettre à la place de $\frac{\rho_2}{r}\sqrt{\left(\frac{\partial\varpi}{\partial\rho}\right)_2}$ dans (35), c'est *la vitesse du son calculée par la formule de Laplace.* (35) devient alors

$$(47)\qquad \frac{\rho_1\rho_2}{r^2}\,\frac{p_2-p_1}{\rho_2-\rho_1}=\frac{\rho_2^2}{r^2}\left(\frac{\partial p_2}{\partial\rho_2}-\frac{r\rho_2}{c_2}\,\frac{\partial p_2}{\partial T_2}\right).$$

C'est exactement la formule (41), mais ici elle n'est affectée d'aucune impossibilité, parce que la variation de α qui s'est produite dans l'onde interdit d'invoquer les résultats du paragraphe 3.

La seconde différence avec le n° **25** est relative au cas où, dans le mouvement 2, le gaz continue à brûler. *Nous supposons toujours ce mouvement adiabatique.* Nous partons d'ailleurs d'un point N (*fig.* 14)

situé sur l'arc εB, et $\frac{\partial\rho}{\partial t}$, quoique étant sans doute très grand, n'est pas énorme comme dans l'onde de choc. Dès lors (**I**, **8**), le gaz continue à brûler suivant la loi de M. Duhem, et il faut, comme au n° **27** et sous le bénéfice des mêmes remarques, écrire (35) sous la forme

$$(47') \quad \frac{\rho_1\rho_2}{r^2}\,\frac{p_2-p_1}{\rho_2-\rho_1} = \frac{\rho_2^2}{r^2}\left[\frac{\partial p_2}{\partial\rho_2} - \frac{r_{\rho_2}}{c_2}\frac{\partial p_2}{\partial \mathrm{T}_2} + \left(\frac{\partial p_2}{\partial\alpha_2} - \frac{r_\alpha}{c_2}\frac{\partial p_2}{\partial \mathrm{T}_2}\right)\frac{r_{\rho_2}\frac{\partial g_2}{\partial \mathrm{T}_2} - c_2\frac{\partial g_2}{\partial\rho_2}}{c_2\frac{\partial g_2}{\partial\alpha_2} - r_\alpha\frac{\partial g_2}{\partial \mathrm{T}_2}}\right].$$

51. En résumé, notre interprétation de l'onde explosive s'exprime par les équations suivantes qui permettent d'en calculer la vitesse $\frac{d\mathrm{P}}{dt}$:

$$(45) \qquad g(\rho_2, \alpha_2, \mathrm{T}_2) = 0,$$

$$(46) \qquad (p_1+p_2)(\rho_1-\rho_2) + 2\rho_1\rho_2(\mathrm{U}_2-\mathrm{U}_1) = 0,$$

et enfin une équation qui s'écrit

$$(47) \qquad \left(\frac{d\mathrm{P}}{dt}\right)^2 = \frac{\rho_1\rho_2}{r^2}\,\frac{p_2-p_1}{\rho_2-\rho_1} = \frac{\rho_2^2}{r^2}\left(\frac{\partial p_2}{\partial\rho_2} - \frac{r_{\rho_2}}{c_2}\frac{\partial p_2}{\partial \mathrm{T}_2}\right),$$

ou bien

$$(47') \quad \left(\frac{d\mathrm{P}}{dt}\right)^2 = \frac{\rho_1\rho_2}{r^2}\,\frac{p_2-p_1}{\rho_2-\rho_1} = \frac{\rho_2^2}{r^2}\left[\frac{\partial p_2}{\partial\rho_2} - \frac{r_{\rho_2}}{c_2}\frac{\partial p_2}{\partial \mathrm{T}_2} + \left(\frac{\partial p_2}{\partial\alpha_2} - \frac{r_{\alpha_2}}{c_2}\frac{\partial p_2}{\partial \mathrm{T}_2}\right)\frac{r_{\rho_2}\frac{\partial g_2}{\partial \mathrm{T}_2} - c_2\frac{\partial g_2}{\partial\rho_2}}{c_2\frac{\partial g_2}{\partial\alpha_2} - r_{\alpha_2}\frac{\partial g_2}{\partial \mathrm{T}_2}}\right],$$

suivant qu'en arrière de l'onde le gaz s'éteint ou continue à brûler.

Cette théorie donne lieu à trois remarques :

1° Il peut arriver que le point N (*fig.* 14) se trouve en une région de la surface (a) où celle-ci est confondue avec la surface des équilibres véritables. La théorie subsiste, seulement $g = 0$ est l'équation de cette dernière surface, et le gaz brûle derrière l'onde en suivant la loi de la dissociation.

2° Par le fait que (45) est vérifié dans le mouvement qui suit l'onde, il n'y a pas, pour $\frac{d\mathrm{P}}{dt}$, d'autre moyen d'être constant que celui qui résulte de la constance de ρ_2, α_2, T_2 sur le front. La réserve du n° **14** ne joue pas ici.

3° Dans les deux hypothèses qui donnent, l'une l'équation (47),

l'autre l'équation (47), on peut raisonner comme au n° **17**, car les raisonnements de ce numéro sont valables toutes les fois que, dans le mouvement 2, la pression d'un élément bien déterminé varie en restant fonction de sa seule densité. Or cette condition est remplie dans les mouvements adiabatiques se faisant suivant la loi de M. Duhem.

Rôle de la réaction chimique pour entretenir la discontinuité. — 52*. Nous savons que, lorsqu'il ne se produit aucune combustion dans la quasi-onde, (47) est impossible. Nous verrons, *par le calcul numérique direct*, qu'il n'en est plus de même dans le cas contraire. On peut montrer, dès maintenant, que les raisons qui déterminaient tout à l'heure cette impossibilité ne subsistent plus ici. Nous avons rattaché ladite impossibilité à la nécessité, pour l'entropie, de croître à la traversée de la quasi-onde. Étudions de même ici la variation de l'entropie. Soit $\varepsilon(\rho, \alpha, s)$ l'énergie interne spécifique considérée comme fonction de ρ, α, s. On a

$$p = \rho^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}, \qquad T = \frac{\partial \varepsilon}{\partial s},$$

et la loi adiabatique d'Hugoniot s'écrit

(48) $$(p_1 + p_2)(\rho_1 - \rho_2) - 2\rho_1\rho_2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) = 0.$$

L'équation [(19), I] peut aussi s'écrire

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} = \psi\left(\rho, \alpha, s, \frac{\partial \alpha}{\partial t}\right),$$

ψ étant ce que devient φ quand on y remplace T par sa valeur en ρ, α, s, et étant par conséquent *négatif* pour toutes les valeurs positives et nulles de $\frac{\partial \alpha}{\partial t}$.

Immédiatement en arrière de l'onde, nous savons que le fluide est dans un état de faux équilibre limite; l'équation (45) s'écrit

(49) $$\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \alpha_2} = \psi(\rho_2, \alpha_2, s_2, 0) = \gamma(\rho_2, \alpha_2, s_2),$$

et γ est négatif.

Nous n'avons pas en vue ici une théorie générale : nous voulons seulement montrer la possibilité de l'équation (47). Nous pouvons

donc nous placer dans un cas simple pour faciliter les raisonnements. Nous supposerons qu'immédiatement avant l'onde, le gaz est aussi dans un état de faux équilibre limite, *de sorte que* (49) *est vérifiée avec les indices* 1.

Les équations (48) et (49) définissent s_2 et ρ_2 en fonction de α_2, et l'on remarquera que, pour $\alpha_2 = \alpha_1$, on a

$$s_2 = s_1, \qquad \rho_2 = \rho_1.$$

Donc

$$s_2 - s_1 = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{ds_2}{d\alpha_2}\, d\alpha = (\alpha_2 - \alpha_1)\left(\frac{ds_2}{d\alpha_2}\right)_m.$$

Nous admettons qu'il est nécessaire que $s_2 - s_1$ *soit positif.* Comme $\alpha_2 - \alpha_1$ est déjà positif, il faut que $\left(\frac{ds_2}{d\alpha_2}\right)_m$ le soit aussi.

Mais plaçons-nous dans le cas d'une discontinuité non trop forte. Alors $\left(\frac{ds_2}{d\alpha_2}\right)_m$ a le signe de $\frac{ds_2}{d\alpha_2}$ calculé pour la valeur limite α_2. Calculons ce $\frac{ds_2}{d\alpha_2}$ en dérivant (48) par rapport à α_2. On trouve

$$\left(2\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial s_2} + \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1\rho_2}\frac{\partial p_2}{\partial s_2}\right)\frac{ds_2}{d\alpha_2} = -2\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1\rho_2}\frac{\partial p_2}{\partial \alpha_2} + \left(\frac{\rho_2^2}{r^2}\frac{\partial p_2}{\partial \rho_2} - \frac{\rho_1\rho_2}{r^2}\frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1}\right)\frac{(\rho_2 - \rho_1)r^2}{\rho_2^3\rho_1}\frac{d\rho_2}{d\alpha_2}.$$

La discontinuité n'étant pas très forte, $\frac{d\rho_2}{d\alpha_2}$ a le signe de $\frac{\rho_2 - \rho_1}{\alpha_2 - \alpha_1}$, et, comme $\alpha_2 - \alpha_1 > 0$, on peut écrire

$$\left(2\mathrm{T}_2 + \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1\rho_2}\frac{\partial p_2}{\partial s_2}\right)\frac{ds_2}{d\alpha_2} = -2\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1\rho_2}\frac{\partial p_2}{\partial \alpha_2} + \mathrm{K}^2(\mathrm{E}_2^2 - \mathrm{D}^2).$$

E_2 représente la vitesse du son calculée en supposant que α ne joue pas.

La discontinuité n'étant pas trop forte, le coefficient de $\frac{ds_2}{d\alpha_2}$ est positif. Il faut donc que le second membre de l'équation précédente soit positif. Or il contient un terme *essentiellement positif* $-2\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \alpha_2}$ et, par suite, E_2 et D peuvent avoir entre eux une relation de grandeur absolument quelconque. Donc E_2 peut être égal à D, ce qui est nécessaire pour l'équation (47); il peut être aussi égal ou supérieur, ce qui est nécessaire, suivant les cas, pour l'équation (47').

Quoique non entièrement générales, ces considérations suffisent

pour montrer qu'il n'y a aucune absurdité à écrire (47). L'entropie spécifique doit croître à la traversée de la quasi-onde. Ici, *c'est la réaction chimique irréversible qui développe le travail non compensé nécessaire à la réalisation de cette condition.* C'est dans ce sens qu'on peut dire, avec M. Vieille ([1]), que la réaction chimique entretient la discontinuité à l'état de régime. Il est intéressant de remarquer qu'il s'agit d'une question d'entropie et non d'énergie.

Vérifications approximatives. — 55. Nous allons tenter de vérifier numériquement la théorie exprimée par les formules (45), (46), (47), (47'). L'ignorance où nous sommes de la forme de l'équation $g = 0$ nous oblige à nous contenter d'une vérification approchée. Nous admettrons, à titre de première approximation, qu'en arrière de l'onde *la dissociation est sensiblement négligeable*, c'est-à-dire que la combustion est complète dans la quasi-onde, ou encore qu'on peut remplacer (45) par

$$(50) \qquad \alpha_2 = 1.$$

Nous savons [I, (6)] que la surface des équilibres véritables, si on la coupe par des plans $\rho =$ const., donne des courbes s'abaissant du côté des T croissants. Si l'on a affaire à un mélange de gaz parfaits, on peut même démontrer que cette surface part, pour $T = 0$, de la valeur $\alpha = 1$ et présente en ce point un contact d'ordre infini avec le plan $\alpha = 1$. Nous ne considérerons ce résultat que comme une indication sur l'allure de la surface (V) d'énergie dissipée : on peut regarder comme probable que (V) reste pendant longtemps très voisine du plan HH' d'équation $\alpha = 1$ (*fig.* 15). Pour pouvoir remplacer (45) par $\alpha_2 = 1$, il faut admettre en outre que la surface (a) des faux équilibres limites vient sensiblement se confondre avec (V) quand celle-ci est encore très voisine du plan HH'. Cette hypothèse reçoit d'ailleurs quelque probabilité des expériences de M. Pélabon sur l'acide sulfhydrique ([2]). NOUS ADMETTONS DONC FINALEMENT QU'EN ARRIÈRE DE L'ONDE,

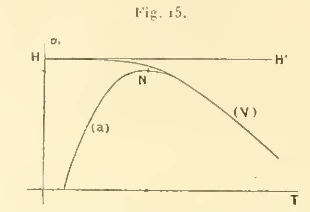
---

([1]) VIEILLE, *loc. cit.*, p. 258.

([2]) PÉLABON, *Comptes rendus*, t. CXXIV, 1897, p. 686.

JUSTE AU FRONT, L'ÉTAT DU FLUIDE EST REPRÉSENTÉ PAR UN POINT N ENCORE TRÈS VOISIN DE HH'.

Fig. 15.



En ce point N, la surface (a) a donc un plan tangent sensiblement parallèle au plan des ρ, T. Donc

$$\frac{\partial g}{\partial \rho} = \frac{\partial g}{\partial \mathrm{T}} = 0,$$

et, par suite, les équations (47) et (47') se confondent et il ne reste pas d'ambiguïté pour savoir laquelle des deux convient.

Nous supposons que nous avons affaire à des gaz parfaits, obéissant aux lois de Mariotte, de Gay-Lussac et de Joule, mais dont les chaleurs spécifiques, indépendantes de ρ, varient avec la température suivant les formules de MM. Mallard et Le Chatelier. Rappelons que ces formules sont les suivantes : la capacité calorifique à *volume constant* y est exprimée en *petites calories* par *degré centigrade* et par *molécule* de gaz. La *molécule* est la masse du gaz (ou du mélange de gaz) qui occupe, dans les conditions normales de température et de pression, un volume de 22 320$^{\mathrm{cm}^3}$ (¹) :

1^{mol} de O, Az, H, CO, HCl.........	$4,5 + 1,2 \frac{\mathrm{T}}{1000}$
» vapeur de H^2O.............	$4,5 + 5,8 \frac{\mathrm{T}}{1000}$
» CO^2......................	$4,5 + 7,4 \frac{\mathrm{T}}{1000}$

(¹) C'est sous la forme adoptée ici que M. Le Chatelier donne ces formules dans son Enseignement de l'École des Mines (*voir* DAMOUR, *Le chauffage industriel et les fours à gaz*, 1898, p. 10).

Pour introduire ces valeurs dans nos formules théoriques, il ne faut pas oublier que celles-ci supposent les quantités de chaleur exprimées en unités dynamiques. Il y a donc à faire un changement d'unités, d'ailleurs facile.

Soient ϖ la masse moléculaire, c'est-à-dire la masse de la molécule de gaz, R une constante, *la même pour tous les gaz*. On a, puisqu'il s'agit de gaz parfaits,

$$p = \frac{R\rho T}{\varpi}, \qquad \frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{RT}{\varpi}, \qquad \frac{\partial p}{\partial T} = \frac{R\rho}{\varpi},$$

$$r_\rho = -\frac{p}{\rho^2}.$$

Prenons une masse M de gaz. La réaction chimique fait varier le nombre des molécules qu'elle contient; elle le fait passer de k_1 à k_2. Ainsi, pour le mélange $H^2 + O$, si la combustion est complète, $k_1 = 1,5$, $k_2 = 1$. On a d'ailleurs

$$k_1 \varpi_1 = k_2 \varpi_2 = M.$$

L'équation (46) s'écrit alors

$$R(\rho_1 - \rho_2)(k_1 \rho_1 T_1 + k_2 \rho_2 T_2) + 2\rho_1 \rho_2 M(U_2 - U_1) = 0.$$

Considérons un état 2′ du mélange dans lequel la composition chimique serait la même que dans l'état 2, mais où la densité et la température seraient ρ_1 et T_1. Soit U'_2 l'énergie interne spécifique dans cet état. On a identiquement

$$MU_2 - MU_1 = -(MU_1 - MU'_2) + MU_2 - MU'_2.$$

Or $MU_1 - MU'_2$ est le *pouvoir calorifique du mélange* M *à volume constant et à la température* T_1. Désignons-le par ML.

Les états 2′ et 2 diffèrent par la densité; mais U, pour les gaz parfaits, ne dépend pas de la densité. Donc $MU_2 - MU'_2$ vaut

$$M \int_{T_1}^{T_2} c_2 \, dT.$$

On peut donc écrire notre équation

$$R(\rho_1 - \rho_2)(k_1 \rho_1 T_1 + k_2 \rho_2 T_2) - 2\rho_1 \rho_2 ML + 2\rho_1 \rho_2 M \int_{T_1}^{T_2} c_2\, dT = 0.$$

Posons $\frac{\rho_2}{\rho_1} = \mu$. Il vient

$$(51) \qquad M \int_{T_1}^{T_2} c_2\, dT = ML + \frac{R}{2}(\mu - 1)\left(k_2 T_2 + \frac{k_1 T_1}{\mu}\right).$$

Quant aux relations (47) elles donnent d'abord

$$(52) \qquad \mu^2 \left(1 + \frac{k_2 R}{M c_2}\right) - \mu \left(2 + \frac{k_2 R}{M c_2}\right) + \frac{k_1 T_1}{k_2 T_2} = 0.$$

Elles donnent ensuite la vitesse de l'onde $\frac{dP}{dt}$. D'ailleurs, pour se placer dans des conditions expérimentales, il faut, rappelons-le, supposer que l'état initial est précisément l'état 1, formules (28), et faire $r = \rho_1$. On a alors, pour la vitesse de l'onde explosive à comparer avec la vitesse observée,

$$(53) \qquad \left(\frac{dP}{dt}\right)^2 = \mu^2 \frac{R k_2 T_2}{M} \left(1 + \frac{k_2 R}{M c_2}\right).$$

Les équations (50), (51), (52), (53) résument l'expression *approchée* de notre théorie. Toutes les quantités affectées de l'indice 1 étant connues, elles permettent de calculer μ, T_2, α_2, $\frac{dP}{dt}$. (α_2 est d'ailleurs égal à 1.)

Le meilleur moyen de les résoudre est de calculer T_2 par (51) en négligeant provisoirement le terme $\frac{R}{2}(\mu - 1)\left(k_2 T_2 + \frac{k_1 T_1}{\mu}\right)$, généralement faible. On calcule alors une première valeur de μ par (52). Cette équation est du second degré et a deux solutions ; il faut prendre la racine supérieure à 1 ; en effet, $\left(\frac{dP}{dt}\right)^2$ doit être positif, donc $p_2 - p_1$ et $\rho_2 - \rho_1$ doivent être de même signe ; comme p_2 est certainement supérieur à p_1, il faut que ρ_2 le soit à ρ_1. La première valeur de μ ainsi calculée permet de corriger l'équation (51) qui donne T_2. On peut procéder ainsi par tâtonnements successifs.

34. Les deux Tableaux suivants résument les calculs que nous avons effectués pour 20 mélanges.

Le premier renferme les données relatives à chaque exemple : dans la colonne 1 un numéro d'ordre ; dans la colonne 2 la composition du mélange initial ; dans la colonne 3 la température initiale ; dans la colonne 4 la réaction que nous avons supposée se produire dans le mélange (il y a là, pour certains cas, une véritable HYPOTHÈSE dans le choix de laquelle nous avons été guidés, en général, par les idées de Dixon) ; dans les colonnes 5, 6, 7, 8, 9 les constantes numériques relatives à cette réaction.

Le second Tableau rappelle, dans les colonnes 1, 2, 3, les données principales de chaque cas. Les colonnes 4, 5, 6, 7 donnent les valeurs de T_2, μ, $\frac{p_2}{p_1}$, $\frac{dP}{dt}$ obtenues par le calcul. La colonne 8 donne les vitesses de l'onde explosive obtenues par les expérimentateurs signalés dans la colonne 9.

On peut voir que l'accord entre les vitesses calculées et les vitesses observées est satisfaisant.

TABLEAU I.

Numéros.	Mélange initial.	$T_1 - 273$.	Réaction.	M (grammes).	k_1.	k_2.	ML grandes calories.	Observations.
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9
1...	$H^2 + O$	10°	$H^2 + O = H^2O$	18	1,5	1	58	
2...	$H^2 + O$	100°	$H^2 + O = H^2O$	18	1,5	1	58,08	
3...	$H^2 + O + 5H$	10°	$H^2 + O = H^2O$	23	4	3,5	58	
4...	$H^2 + O + 5Az$	10°	$H^2 + O = H^2O$	88	4	3,5	58	
5...	$H^2 + O + 5O$	10°	$H^2 + O = H^2O$	98	4	3,5	58	Réactions
6...	$CO + O$ + humidité	10°	$CO + O = CO^2$	44,33	1,518	1,018	68	avec contraction
7...	$CO + O$ + humidité	35°	$CO + O = CO^2$	45,566	1,587	1,087	68	
8...	$CO + H^2 + O^2$	10°	$CO + H^2 + O^2 = CO^2 + H^2O$	62	3	2	126	
9...	$C^2H^2 + 3O^2$	10°	$C^2H^2 + 5O = 2CO^2 + H^2O$	122	4	3,5	307	
10...	$C^2H^2 + 10O^2$	10°	$C^2H^2 + 5O = 2CO^2 + H^2O$	346	11	10,5	307	
11...	$C^2H^2 + O^2$	10°	$C^2H^2 + O^2 = 2CO + H^2$	58	2	3	113	
12...	$C^2Az^2 + O^2$	10°	$C^2Az^2 + O^2 = 2CO + Az^2$	84	2	3	126	Réactions
13...	$C^2Az^2 + O^2 + 2Az^2$	10°	$C^2Az^2 + O^2 = 2CO + Az^2$	140	4	5	126	avec dilatation.
14...	$CH^4 + O^2$	10°	$CH^4 + O^2 = CO + H^2O + H^2$	48	2	3	67,5	
15...	$C^2Az^2 + 2O^2$	10°	$C^2Az^2 + 2O^2 = 2CO^2 + Az^2$	116	3	3	262	
16...	$CH^4 + 2O^2$	10°	$CH^4 + 2O^2 = CO^2 + 2H^2O$	80	3	3	193,5	
17...	$CH^4 + 4O^2$	10°	$CH^4 + 2O^2 = CO^2 + 2H^2O$	144	5	5	193,5	Réactions
18...	$H + Cl$	10°	$H + Cl = HCl$	36,5	1	1	22	sans variation
19...	$H + Cl + H^2$	10°	$H + Cl = HCl$	38,5	2	2	22	de volume
20...	$Az^2O + H^2$	10°	$Az^2O + H^2 = Az^2 + H^2O$	46	2	[illegible]	79,6	

Tableau II.

Numéros.	Mélange initial.	$T_1 - 273$.	T_2	μ.	$\frac{p_2}{p_1}$.	Résultats du calcul — Vitesse mètres par seconde	Vitesse observée mètres par seconde.	Observateurs.
1	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
1...	$H^2 + O$	10°	3956	1,879	17,5	2629	2810 2821	Berthelot et Vieille Dixon.
2.....	$H^2 + O$	100°	3981	1,864	12,9	2615	2790	Dixon.
3....	$H^2 + O + 5H$	10°	2596	1,79	14,4	3526	3530	Dixon
4.......	$H^2 + O + 5Az$	10°	2596	1,79	14,4	1798	1822	Dixon.
5.......	$H^2 + O + 5O$	10°	2596	1,79	14,4	1692	1707	Dixon
6.......	$CO + O$ + humidité	10°	3852	1,887	17,2	1664	1676	Dixon.
7.......	$CO + O$ + humidité	35°	3748	1,88	15,6	1669	1738	Dixon.
8.........	$CO + H^2 + O^2$	10°	3900	1,881	17,3	1984	2008 2143	Berthelot et Vieille. Dixon.
9.........	$C^2H^2 + 3O^2$	10°	4890	1,91	28,8	2120	2220	Le Chatelier.
10.........	$C^2H^2 + 10O^2$	10°	3560	1,84	22,0	1858	1850	Le Chatelier.
11.........	$C^2H^2 + O^2$	10°	5570	1,84	54,5	3091	2961	Dixon.
12.........	$C^2Az^2 + O^2$	10°	5960	1,837	58,2	2645	2728	Dixon.
13.........	$C^2Az^2 + O^2 + 2Az^2$	10°	4244	1,8	33,7	2214	2166	Dixon.
14.........	$CH^4 + O^2$	10°	3050	1,835	29,8	2477	2528	Dixon.
15.........	$C^2Az^2 + 2O^2$	10°	5150	1,914	34,8	2075	2195 2321	Berthelot et Vieille. Dixon.
16.........	$CH^4 + 2O^2$	10°	4080	1,904	27,4	2220	2287 2302	Berthelot et Vieille. Dixon.
17.........	$CH^4 + 4O^2$	10°	3570	1,86	23,4	2139	2166	Dixon.
18.........	$H + Cl$	10°	3880	1,787	24,5	1851	1720	Dixon.
19.........	$H + Cl + H^2$	10°	2400	1,73	14,7	2000	1855	Dixon.
20.........	$Az^2O + H^2$	10°	3933	1,865	25,9	2350	2284 2305	Berthelot et Vieille. Dixon.

55. On voit que les températures T_2 sont parfois fort élevées. Ce fait diminue certainement la valeur démonstrative de la comparaison qui précède entre la théorie et l'expérience, car il légitime de sérieuses objections aux hypothèses fondamentales qui servent de base à nos calculs et qui sont :

1° L'hypothèse que les chaleurs spécifiques de MM. Mallard et Le Chatelier sont valables jusqu'à la température T_2 ;

2° Celle que la dissociation est négligeable.

Il y a d'ailleurs deux sortes de dissociations, deux espèces de phénomènes d'équilibre qui peuvent intervenir. Tout d'abord la réaction même, mentionnée dans la colonne 4 du premier Tableau, peut être limitée par la réaction inverse; ainsi, pour le mélange 9, la réaction

$$2CO^2 + H^2O = C^2H^2 + 5O$$

peut limiter la réaction

$$C^2H^2 + 5O = 2CO^2 + H^2O;$$

c'est la *dissociation primaire*. En outre, il peut se produire des phénomènes de *dissociation secondaire;* par exemple, dans le cas que nous venons de citer, l'acide carbonique produit peut se décomposer en CO + O. Quand nous parlons de l'influence de la dissociation, nous avons en vue aussi bien la *secondaire* que la *primaire;* pour certains cas, d'ailleurs, les deux se confondent.

Comme conséquence de la critique ci-dessus, il faut, dans nos Tableaux, attacher principalement de l'importance aux cas pour lesquels T_2 n'est pas trop fort. Pour les exemples 3, 4, 5, 10, 14, 17, 19, il ne dépasse pas 3600° et l'on peut remarquer que la vérification numérique y est particulièrement favorable, sauf pour le mélange 19 dont nous parlerons tout à l'heure. Il est vrai qu'elle serait très mauvaise si, au lieu de nous reporter aux expériences de M. Dixon, nous considérions celles de MM. Berthelot et Vieille. Ces savants ont en effet toujours trouvé, lorsque les mélanges explosifs étaient dilués dans des gaz inertes, comme c'est le cas pour 3, 4, 5, 10, 17, 19, des vitesses beaucoup plus faibles que celles qu'a mesurées M. Dixon. Mais M. Dixon a expliqué pourquoi ses prédécesseurs ont dû obtenir des nombres trop petits. La dilution dans des gaz inertes rend probablement la réaction plus paresseuse, et il est permis de se demander si, dans ces conditions, les mesures de MM. Berthelot et Vieille n'ont pas porté sur la période d'établissement de l'onde explosive plutôt que sur l'onde explosive elle-même.

L'exception que présente le mélange 19, dans cette série à température de combustion relativement faible, s'explique par la grande facilité de la dissociation de HCl et par le fait que les chaleurs spécifiques de ce gaz aux hautes températures sont mal connues. L'acide carbonique présente les mêmes caractères. C'est pourquoi les exemples les plus importants de la série sont 3, 4, 5, 14 où les gaz brûlés ne contiennent ni HCl ni CO^2. Or ils sont parmi les plus satisfaisants.

Examinons maintenant les cas où T_2 dépasse 3600°.

Naturellement, le mélange 18, qui donne un gaz très facilement dis-

sociable, ne fournit pas une bonne vérification. En somme cet exemple a fort peu de poids.

Pour le mélange CO + O, MM. Berthelot et Vieille ont trouvé 1089°. M. Dixon estime ce nombre trop faible. D'après ce savant, la combustion de CO + O pour CO^2 se ferait difficilement en l'absence de vapeur d'eau; MM. Berthelot et Vieille, ayant opéré sur des gaz secs, se seraient trouvés en présence d'une explosion incomplète. Pour vérifier ses idées, M. Dixon a opéré sur des gaz saturés d'humidité et a trouvé, en effet, des vitesses bien plus grandes; le maximum 1738 a été obtenu en saturant le mélange à 35°. Un autre fait semble bien prouver que MM. Berthelot et Vieille n'ont pas observé dans ce cas la véritable onde explosive. M. Le Chatelier a trouvé, avec CO + O, une vitesse de 1900 [1], par un procédé d'expérimentation moins précis, il est vrai, que celui de MM. Berthelot, Vieille ou Dixon. Aussi avons-nous adopté la manière de voir de M. Dixon et ajouté de l'humidité au mélange CO + O. Nous pensons que c'est l'exemple 7 et non l'exemple 6 qui doit servir de comparaison entre la théorie et l'expérience; dans le mélange 6 la quantité de vapeur d'eau n'est sans doute pas encore assez forte pour que l'expérience puisse être considérée comme ayant donné la véritable onde explosive.

Ces exemples 6 et 7 donnent naturellement de l'acide carbonique dans les gaz brûlés. Il en est de même des mélanges 8, 9, 15, 16. On peut craindre pour eux une assez forte dissociation secondaire (se confondant d'ailleurs pour certains avec la primaire) ainsi que de sérieuses erreurs du fait de l'emploi des formules de MM. Mallard et Le Chatelier.

Toutefois deux circonstances tendent à diminuer l'influence de la dissociation de CO^2.

Tout d'abord cette dissociation, augmentant le volume du gaz, est empêchée par les fortes pressions; or la pression p_2 est relativement élevée, elle est presque toujours deux fois environ ce qu'elle serait si le mélange détonait en vase clos.

En second lieu, si même cette dissociation se produit, elle *peut* ne pas avoir une grande influence sur la vitesse, car, si elle diminue le pouvoir calorifique ML, elle augmente k_2 et diminue les chaleurs spé-

---

[1] *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CXXX, p. 1755.

cifiques des gaz brûlés aux hautes températures. Faisons par exemple le calcul des mélanges 9, 15, 16 en supposant une dissociation totale de CO^2, c'est-à-dire en admettant les réaction suivantes :

Mélange 9.......... $C^2H^2 + 5O = 2CO + O^2 + H^2O$,
» 15.......... $C^2Az^2 + 2O^2 = 2CO + O^2 + Az^2$,
» 16.......... $CH^4 + 2O^2 = CO + O + 2H^2O$.

On trouve respectivement

Mélange	9	2320	au lieu de	2120	le chiffre expérimental	étant	2220
»	15	2361	»	2075	»	»	2321 (Dixon).
»	16	2244	»	2220	»	»	2322 (Dixon).

Les différences avec les nombres obtenus dans le Tableau de la page 58 ne sont en somme pas énormes; pour l'exemple 16 la différence est négligeable.

M. Dixon estime que ce sont, en effet, les trois réactions

$$C^2H^2 + 5O = 2CO + O^2 + H^2O,$$

$$C^2Az^2 + 2O^2 = 2CO + O^2 + Az^2,$$

$$CH^4 + 2O^2 = CO + O + 2H^2O$$

qui se produisent dans l'onde explosive des cas 9, 15, 16. On voit que, pour 9 et 16 au moins, il est à peu près indifférent, pour notre vérification, d'admettre une combustion à l'état de CO ou à l'état de CO^2. Si nous avons admis, dans notre Tableau, une combustion complète du carbone, c'est que cette hypothèse nous paraît plus en rapport avec le fait que le mélange CO + O est susceptible de donner lui-même l'onde explosive; on remarquera que la combustion du formène donne d'elle-même la vapeur d'eau nécessaire, d'après ce qui a été dit plus haut, à la combustion de CO. Pour le mélange 15, il n'y a pas de vapeur d'eau; aussi ne serions-nous pas étonnés qu'il fallût donner ici raison à M. Dixon; nous trouvons même que nos résultats numériques sont favorables à sa manière de voir. Comparons, en effet, les mélanges 12, 13, 15, celui-ci étant traité avec l'hypothèse de M. Dixon; les vitesses calculées, 2645, 2214, 2361 donnent une série bien d'accord avec les nombres expérimentaux de ce savant 2728, 2166, 2321.

Quant à l'emploi des formules de MM. Mallard et Le Chatelier,

nous ne serions pas surpris qu'il donnât pour CO^2 une croissance trop rapide de la chaleur spécifique avec la température. Cela expliquerait que nous trouvions, lorsqu'il y a de l'acide carbonique dans les gaz brûlés, des nombres généralement inférieurs aux nombres observés.

Les mélanges 11, 12, 13 donnent des températures très élevées, mais des gaz relativement peu dissociables et dont les chaleurs spécifiques sont assez bien déterminées. Nous ne savons rien sur la dissociation primaire; mais c'est déjà quelque chose que de ne pas avoir à craindre de dissociation secondaire (il est bien évident qu'il n'y a pas à tenir compte de la réaction $2CO = CO^2 + C$ insensible aux hautes températures) [1] et de pouvoir assez bien compter sur les valeurs des chaleurs spécifiques. De là sans doute le succès suffisant des vérifications malgré les hautes températures atteintes.

Les mélanges 1, 2, 20 donnent des T_2 élevés et de la vapeur d'eau dans les gaz brûlés. La vapeur d'eau peut passer pour difficilement dissociable. Sa dissociation d'ailleurs est empêchée par les fortes pressions. Ainsi pensons-nous que les exemples 1, 2, 20 ont assez de poids. Nous ne serions pas surpris que les formules de Mallard et Le Chatelier donnassent, pour H^2O comme pour CO^2, une croissance trop rapide de la chaleur spécifique avec la température. Cela expliquerait la faiblesse des nombres 2629 et 2615, obtenus dans les exemples 1 et 2, et cela ne serait nullement en désaccord avec le résultat obtenu pour l'exemple 20. Dans ce dernier, en effet, la réaction se fait sans variation de volume; si la forte pression atteinte peut empêcher la dissociation secondaire de H^2O, elle n'a pas d'influence sur la dissociation primaire, laquelle pourrait expliquer pourquoi le nombre calculé aurait, surtout avec des chaleurs spécifiques plus faibles, une tendance à être trop fort.

Influence de la dissociation primaire. — 56. Il ne faut pas oublier que l'expression exacte de la théorie que nous développons ici est donnée par (45), (46), (47), (47'). Cette théorie tient parfaitement compte des phénomènes de dissociation et, si nous les avons supposés

---

[1] BOUDOUARD, *Recherches sur les équilibres chimiques* (*Thèse de doctorat*, 1901).

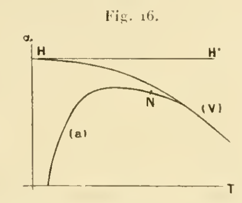
négligeables dans les n^{os} **35-53**, c'est uniquement pour pouvoir effectuer des vérifications numériques. Pour se rendre compte, au moins dans une certaine mesure, de la portée de ces vérifications, on peut faire des calculs intéressants. Nous en avons déjà fait trois pour estimer le rôle de la dissociation secondaire dans les mélanges 9, 15 et 16; en voici maintenant qui se rapportent à l'influence de la dissociation primaire.

Au lieu de remplacer (45) par $\alpha_2 = 1$, remplaçons-la par

$$\alpha_2 = \text{une valeur arbitraire plus petite que } 1.$$

Cela revient à admettre qu'il faut remplacer la figure 15 par la figure 16, le point N, représentatif de l'état du fluide en arrière de

Fig. 16.



l'onde, étant assez loin du plan HH'. Supposons en outre que le mouvement 2 soit tel que le POINT REPRÉSENTATIF PÉNÈTRE, A PARTIR DE N, DANS LA RÉGION DES FAUX ÉQUILIBRES, DE TELLE SORTE QUE CE SOIT ENCORE (47) QU'IL FAILLE ÉCRIRE ICI.

Dans ces conditions, nous retombons, pour les gaz parfaits, sur les équations (51), (52), (53), avec cette seule différence que ML et Mc_2, qui sont fonctions de α_2, ont des valeurs numériques différentes faciles à calculer d'ailleurs.

Nous avons fait des calculs de ce genre pour les mélanges $H^2 + O$ et $H + Cl + H^2$, la température T_1 étant 283° et α_2 étant pris arbitrairement égal à 0,9. Nous avons trouvé :

	T_2.	μ.	Vitesse calculée
$H^2 + O$............	3820	1,87	2646
$H + Cl + H^2$.......	2150	1,71	1864

Si l'on compare ces valeurs des vitesses avec celles du Tableau de

la page 58, on est frappé de leur proximité. Pour $H^2 + O$ notamment, il n'y a que 17^m de différence et nous n'avons certes pas la prétention d'obtenir par la théorie la vitesse de l'onde explosive avec une semblable approximation; l'incertitude qui règne sur les données physiques (chaleurs spécifiques, pouvoir calorifique) ne le permet certainement pas. Nous attachons une assez grande importance à ce résultat. Il nous paraît prouver que l'objection relative à la dissociation, sur laquelle nous avons insisté dans le n° **55**, est peut-être moins forte qu'elle ne paraît d'abord. Pour expliquer que nos vérifications numériques réussissent, nous ne sommes pas obligés d'admettre que la dissociation est nulle, ce qui serait certainement contraire aux faits ([1]). Nous voyons qu'elle peut être assez notable sans modifier beaucoup les résultats de nos calculs et nous sommes, *jusqu'à un certain point*, autorisés à dire *non pas qu'il faut admettre que, dans le phénomène de l'onde explosive, les réactions sont complètes, mais bien qu'on peut calculer la vitesse, en première approximation, comme s'il en était ainsi.*

Il est possible que cette circonstance soit due à ce que les formules de MM. Mallard et Le Chatelier groupent ensemble deux phénomènes, la dissociation et la variation des chaleurs spécifiques avec la température, auquel cas, en les employant, nous tiendrions déjà compte, dans une mesure d'ailleurs difficile à préciser, de la dissociation.

Il est intéressant de remarquer que, pour l'explosion

$$H^2 + O = H^2O,$$

nous trouvons une vitesse légèrement plus forte avec une combustion incomplète qu'avec une combustion complète. Cela provient de ce que, si ML est abaissé, par contre k_2 et $1 + \frac{k_2 R}{M c_2}$ sont augmentés, et la capacité calorifique des gaz brûlés aux hautes températures est diminuée. Nous ne serions pas étonnés que le léger accroissement de vitesse indiqué par le calcul ne fût qu'une apparence due au fait que les formules de MM. Mallard et Le Chatelier tiennent déjà un peu compte

([1]) *Voir* DIXON, *loc. cit.*, p. 143, 146, 147. Après le passage de l'onde explosive dans $H^2 + O$, il reste 1 pour 100 de gaz tonnant non combiné.

de la dissociation et, par suite, donnent pour la chaleur spécifique de H^2O une croissance trop rapide avec T. En tout cas, le sens de la variation de vitesse se renverse complètement quand on fait diminuer encore α_2. Pour $\alpha_2 = 0,5$, on trouve 2541^m.

Pour le mélange $H + Cl + H^2$, où la dissociation ne fait pas varier k_2 et où elle augmente les chaleurs spécifiques aux hautes températures, on observe, dès la valeur $\alpha_2 = 0,9$, un abaissement sensible de la vitesse dû à la dissociation. *C'est là très probablement l'effet le plus général de ce phénomène.*

Nous devons dire, à propos du mélange $H + Cl + H^2$, que la chaleur spécifique du chlore est mal connue. Tout ce qu'on sait, c'est qu'elle varie assez vite avec la température. Faute de données précises, nous avons admis qu'elle était donnée par la même formule que celle de l'acide carbonique ([1]). Le nombre obtenu pour la vitesse, 1864, est remarquablement voisin du nombre expérimental et les conditions de température et de combinaison ($T_2 = 2150$, $\alpha_2 = 0,9$) sont assez bien d'accord avec ce que MM. Mallard et Le Chatelier disent de la dissociation de l'acide chlorhydrique ([2]).

57'. A partir du moment où l'on suppose une dissociation notable, le choix que nous avons fait dans ce qui précède de l'équation (47), à l'exclusion complète de (47'), est sujet à critiques. On remarquera en passant que ces critiques sont à présenter déjà à propos des calculs faits au n° **53** sur la dissociation secondaire de CO^2 dans les exemples 9, 15 et 16. Ne pourrait-on pas se passer de cette hypothèse que le mouvement 2 fait pénétrer le point représentatif dans la région des faux équilibres?

Dans l'ignorance où nous sommes sur la forme de la fonction g, nous ne sommes parvenus qu'à la remplacer par la suivante : AUX TEMPÉRATURES OÙ EST PORTÉ LE GAZ EN ARRIÈRE DE L'ONDE, LES DEUX SURFACES DES FAUX ÉQUILIBRES LIMITES SONT SENSIBLEMENT CONFONDUES AVEC CELLE DES ÉQUILIBRES VRAIS.

Dès lors, la figure 15 devient la figure 17 : la région des faux équi-

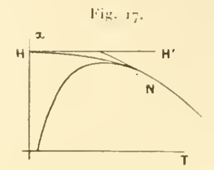
---

([1]) *Voir* MALLARD et LE CHATELIER, *loc. cit.*, p. 513, 552 et 553.

([2]) *Ibid.*, p. 537.

libres est réduite à rien; par la définition même des corps à réaction vive, le point représentatif ne peut, dans le mouvement 2, pénétrer dans la région de combinaison ou de décomposition en s'éloignant sensiblement de la surface des faux équilibres limites; par conséquent,

Fig. 17.



que le gaz se comprime ou se dilate, ce point va rester sur la surface des équilibres vrais et brûler *suivant la loi de la dissociation* (II, 11). Nous admettrons alors la théorie de la dissociation des mélanges gazeux de Hortsmann et Gibbs, moyennant quoi la fonction g sera connue.

Pour ne pas nous encombrer d'une généralité inutile, nous considérerons le cas où la réaction chimique est la formation d'un gaz G_a de masse moléculaire ϖ_a par la combinaison de deux gaz G_b et G_c de masses moléculaires ϖ_b et ϖ_c. La formule de la réaction sera

$$\lambda_b \text{ molécules de } G_b + \lambda_c \text{ molécules de } G_c = \lambda_a \text{ molécules de } G_a.$$

Considérons une masse M formée de $\lambda_b \varpi_b$ de G_b et $\lambda_c \varpi_c$ de G_c,

$$M = \lambda_b \varpi_b + \lambda_c \varpi_c.$$

L'état de combinaison du mélange peut être défini en disant qu'il s'est formé $\lambda_a \alpha_2$ molécules de G_a, α_2 étant compris entre 0 et 1. La théorie des mélanges gazeux apprend que le potentiel interne de la masse M à la température T_2 et sous la densité ρ_2 est

$$\begin{aligned} M\mathcal{F} = \quad & \lambda_a \alpha_2 \quad \varpi_a \left[h_a(T_2) + \frac{RT_2}{\varpi_a} L \rho_2 \frac{\lambda_a \alpha_2 \varpi_a}{M} \right] \\ & + \lambda_b (1 - \alpha_2) \varpi_b \left[h_b(T_2) + \frac{RT_2}{\varpi_b} L \rho_2 \frac{\lambda_b (1 - \alpha_2) \varpi_b}{M} \right] \\ & + \lambda_c (1 - \alpha_2) \varpi_c \left[h_c(T_2) + \frac{RT_2}{\varpi_c} L \rho_2 \frac{\lambda_c (1 - \alpha_2) \varpi_c}{M} \right]. \end{aligned}$$

L'équation (45) s'obtient en égalant à zéro $\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \alpha_2}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \alpha_2} = \quad & \lambda_a \varpi_a \left[h_a(\mathrm{T}_2) + \frac{\mathrm{RT}_2}{\varpi_a} \mathrm{L}\rho_2 \frac{\lambda_a \alpha_2 \varpi_a}{\mathrm{M}} \right] \\
& - \lambda_b \varpi_b \left[h_b(\mathrm{T}_2) + \frac{\mathrm{RT}_2}{\varpi_b} \mathrm{L}\rho_2 \frac{\lambda_b (1-\alpha_2)\varpi_b}{\mathrm{M}} \right] \\
& - \lambda_c \varpi_c \left[h_c(\mathrm{T}_2) + \frac{\mathrm{RT}_2}{\varpi_c} \mathrm{L}\rho_2 \frac{\lambda_c (1-\alpha_2)\varpi_c}{\mathrm{M}} \right] \\
& \qquad + \mathrm{RT}_2(\lambda_a - \lambda_b - \lambda_c) = 0.
\end{aligned}$$

Posons

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \mu.$$

L'équation précédente prend la forme

$$\mathrm{F}(\mu, \alpha_2, \mathrm{T}_2) + \mathrm{RT}_2(\lambda_a - \lambda_b - \lambda_c)\mathrm{L}\rho_1 = 0, \tag{54}$$

les coefficients de la fonction F ne dépendant pas de ρ_2. (54) remplace (45).

(46) se transforme, comme au n° **55**, en

$$\mathrm{M}\int_{\mathrm{T}_1}^{\mathrm{T}_2} c_2\, d\mathrm{T} = \mathrm{ML} + \frac{\mathrm{R}}{2}(\mu - 1)\left(k_2 \mathrm{T}_2 + \frac{k_1 \mathrm{T}_1}{\mu}\right), \tag{55}$$

seulement, ici, c_2 et L sont des fonctions de α_2.

Que devient maintenant (47')? On a évidemment

$$k_2 = \lambda_a \alpha_2 + \lambda_b(1-\alpha_2) + \lambda_c(1-\alpha_2);$$

$$\varpi_2 = \frac{\mathrm{M}}{k_2} = \frac{\lambda_b \varpi_b + \lambda_c \varpi_c}{\lambda_a \alpha_2 + \lambda_b(1-\alpha_2) + \lambda_c(1-\alpha_2)};$$

$$\begin{aligned}
c_2 &= -\frac{1}{\mathrm{M}}\left[\lambda_a \alpha_2 \varpi_a \mathrm{T}_2 \frac{d^2 h_a}{d\mathrm{T}_2^2} + \lambda_b(1-\alpha_2)\varpi_b \mathrm{T}_2 \frac{d^2 h_b}{d\mathrm{T}_2^2} + \lambda_c(1-\alpha_2)\varpi_c \mathrm{T}_2 \frac{d^2 h_c}{d\mathrm{T}_2^2}\right] \\
&= \frac{1}{\mathrm{M}}\left[\lambda_a \alpha_2 \varpi_a c_a + \lambda_b(1-\alpha_2)\varpi_b c_b + \lambda_c(1-\alpha_2)\varpi_c c_c\right];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathrm{U}_2}{\partial \alpha_2} &= \frac{1}{\mathrm{M}}\left[\lambda_a \varpi_a\left(h_a - \mathrm{T}_2 \frac{dh_a}{d\mathrm{T}_2}\right) - \lambda_b \varpi_b\left(h_b - \mathrm{T}_2 \frac{dh_b}{d\mathrm{T}_2}\right) - \lambda_c \varpi_c\left(h_c - \mathrm{T}_2 \frac{dh_c}{d\mathrm{T}_2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\mathrm{M}}\left[\lambda_a \varpi_a \mathrm{U}_a - \lambda_b \varpi_b \mathrm{U}_b - \lambda_c \varpi_c \mathrm{U}_c\right],
\end{aligned}$$

U étant l'énergie interne spécifique

Dès lors le dernier membre de l'équation (47') peut s'écrire, tout calcul fait, en faisant $r = \rho_1$ et en se rappelant que, pour les états d'équilibre, le coefficient calorifique r_α vaut $\frac{\partial U}{\partial \alpha}$,

$$\mu^2 \left[\frac{RT_2 k_2}{M}\left(1 + \frac{k_2 R}{M c_2}\right) - \frac{\left(RT_2 \frac{\lambda_a - \lambda_b - \lambda_c}{M} - \frac{R k_2}{M c_2}\frac{\partial U_2}{\partial \alpha_2}\right)^2}{\frac{RT_2}{M}\left(\frac{\lambda_a}{\alpha_2} + \frac{\lambda_b}{1-\alpha_2} + \frac{\lambda_c}{1-\alpha_2}\right) + \frac{1}{c_2 T_2}\left(\frac{\partial U_2}{\partial \alpha_2}\right)^2} \right]$$

ou encore

$$\mu^2 \frac{RT_2 k_2}{M}\left(1 + \frac{k_2 R}{M c_2}\right) - \Xi,$$

en désignant par Ξ le terme correctif qui différencie cette expression de celle qui se trouve au dernier membre de (47). L'équation (47') s'écrit donc

$$(56) \qquad \left(\frac{dP}{dt}\right)^2 = \mu \frac{\frac{R\rho_2 T_2}{\varpi_2} - \frac{R\rho_1 T_1}{\varpi_1}}{\rho_2 - \rho_1} = \mu^2 \frac{RT_2 k_2}{M}\left(1 + \frac{k_2 R}{M c_2}\right) - \Xi.$$

Les relations (54), (55), (56) comprennent quatre équations qui permettent de déterminer μ, T_2, α_2, $\frac{dP}{dt}$. Comme elles sont très compliquées à résoudre, nous emploierons la méthode suivante pour en tirer parti. Nous commencerons par négliger le terme Ξ et par prendre arbitrairement la valeur de α_2. Nous serons ainsi ramenés aux calculs du n° **36**. Cela étant, nous calculerons le terme Ξ et le comparerons au terme $\mu^2 \frac{RT_2 k_2}{M}\left(1 + \frac{k_2 R}{M c_2}\right)$.

Cette méthode suivie pour le mélange $H^2 + O$ nous a donné les résultats suivants, en unités C.G.S.,

$$\alpha_2 = 0,9, \qquad \mu^2 \frac{RT_2 k_2}{M}\left(1 + \frac{k_2 R}{M c_2}\right) = 7 \times 10^{10}, \qquad \Xi = 4 \times 10^7,$$

$$\alpha_2 = 0,5, \qquad \mu^2 \frac{RT_2 k_2}{M}\left(1 + \frac{k_2 R}{M c_2}\right) = 6,45 \times 10^{10}, \qquad \Xi = 12,5 \times 10^8.$$

C'est dire que Ξ est négligeable même avec des dissociations assez notables et que (47) peut remplacer (47') avec assez d'approximation.

Si la surface (a) ne coïncide pas avec la surface (V), elle chemine néanmoins très probablement à son voisinage, avec une allure analogue. Nous pensons donc que le calcul que nous venons de faire justifie assez bien, même dans ce cas, l'emploi exclusif de (47) dans nos vérifications numériques.

Il montre aussi, ce que nous avions annoncé (II, 25), que la diminution de vitesse du son que l'on peut attendre, aux hautes températures, du fait de la réaction chimique, dans les corps à réaction vive doit être probablement assez faible et fort difficile à mettre en évidence par l'expérience.

Influence de la pression initiale. — 58. Des expériences ont été faites pour rechercher quelle influence la pression initiale p_1 exerçait sur la vitesse de l'onde explosive, *la température* T_1 *restant constante*. MM. Berthelot et Vieille ont fait varier p_1 du simple au triple au voisinage de la pression atmosphérique et ont conclu que, dans ces limites, la vitesse en est indépendante [1]. M. Dixon a repris la question et a eu l'heureuse idée d'étendre ses recherches à des pressions inférieures à la pression atmosphérique. Il a montré que la vitesse augmente en même temps que p_1, mais qu'à partir d'une certaine limite, assez peu élevée, l'augmentation est très faible. D'ailleurs les variations qu'il a obtenues ne sont pas très grandes et peuvent être regardées comme d'un ordre de grandeur différent de celui de la vitesse elle-même. Ainsi, pour $H^2 + O$, la pression variant de 200^{mm} à 1500^{mm} de mercure, la vitesse varie de 2627 à 2872 et, à partir de 1500^{mm}, elle change peu. Ces résultats expliquent très bien pourquoi MM. Berthelot et Vieille ont pu croire à l'indépendance de la vitesse vis-à-vis de p_1.

L'accroissement concomitant de la vitesse et de p_1 a été observé par M. Dixon aussi bien avec des mélanges, comme $H^2 + O$ ou $CO + O$, qui brûlent avec contraction, qu'avec des mélanges comme $C^2Az^2 + O^2$, qui brûlent avec dilatation. Le mélange $CH^4 + 2O^2$, où la réaction $CH^4 + 2O^2 = CO^2 + 2H^2O$ se fait sans variation de volume, a présenté aussi le même phénomène, mais à un degré moindre.

---

(1) BERTHELOT, *De la force des matières explosives*, p. 135.

Voici quelques chiffres expérimentaux

$H^2 + O$....	p_1 variant de 200^{mm} à 1500^{mm} de mercure,	la vitesse a varié de	2627 à 2872
$C^2Az^2 + O^2$.	p_1 » 500 à 1000	»	2536 à 2671 (tubes de 5^{mm})
$CH^4 + 2O^2$.	p_1 » 500 à 1000	»	2280 à 2319

Faute de données expérimentales suffisantes, il nous est impossible de savoir si ces résultats sont en contradiction ou en accord avec notre théorie. Tout ce qu'on peut dire c'est que, jusqu'à plus ample informé, ils ne lui sont nullement contraires. Prenons d'abord la théorie exprimée, moyennant certaines hypothèses simplificatrices, par (50), (51), (52), (53). Ces formules indiquent que la vitesse est rigoureusement indépendante de p_1. En effet c_2 et ML sont indépendants de la densité, puisqu'il s'agit de gaz parfaits, de sorte que ρ_1 et ρ_2 n'entrent dans les équations que par le rapport μ; les variations de ρ_1, c'est-à-dire celles de p_1, sont sans influence sur $\frac{dP}{dt}$. Nous n'avons pas à nous étonner de ce désaccord entre l'expérience et une théorie simplifiée qui n'est qu'une première approximation. Dans le Tableau de la page 58, les valeurs expérimentales des vitesses sont celles qui ont été obtenues à 760^{mm} de mercure. Pour les valeurs calculées, p_1 n'intervient pas.

Considérons, au contraire, la théorie comme exprimée par (54), (55), (56) *et prenons le cas particulier d'une combustion sans variation de volume*. Dans ce cas, $\lambda_a = \lambda_b + \lambda_c$ et ρ_1 n'entre pas explicitement dans les équations. Celles-ci donnent donc un $\frac{dP}{dt}$ indépendant de ρ_1, c'est-à-dire de p_1. Cette conclusion paraît trouver une vérification approchée dans le fait que, pour $CH^4 + 2O^2$, l'influence de p_1 est relativement réduite.

Quand la combustion fait varier le volume, les équations (54), (55), (56) contiennent explicitement ρ_1. Leur complication rend la discussion difficile : il y a tout lieu de penser toutefois qu'elles feraient correspondre à un accroissement de ρ_1, un accroissement de α_2 et de $\frac{dP}{dt}$ quand la réaction produit une contraction, une diminution de α_2 et de $\frac{dP}{dt}$ quand elle donne une dilatation. Cela serait contraire à l'ex-

périence. Mais il ne faut pas oublier que (54) ne remplace (45) que par une série d'hypothèses. Avec (45), on entrevoit parfaitement la possibilité des faits observés par M. Dixon. Supposons, ce qui paraît être le cas général, que $\frac{dV}{dt}$ augmente avec α_2; supposons en outre que le frottement chimique diminue quand la pression augmente (*ce qui paraît d'accord avec le fait, bien connu des ingénieurs, que l'inflammation dans les moteurs à gaz se produit d'autant mieux que la compression est plus forte*), de sorte que les α de la surface $g=0$ aillent en croissant quand ρ croît; cela suffit pour rendre compte de l'augmentation de $\frac{dV}{dt}$ avec p_1 observée dans tous les cas.

Ajoutons aussi que peut-être la compression diminue-t-elle l'action des parois du tube où se fait l'expérience; celle-ci a une influence sensible sur la vitesse quand les tubes sont étroits.

Influence de la température initiale. — **59.** M. Dixon a étudié l'influence de la température initiale T_1, *la pression p_1 restant constante*. Pour le mélange H^2+O, la vitesse diminue quand T_1 augmente. Il ne faut pas attacher d'importance pour cette question, croyons-nous, aux expériences faites par M. Dixon sur $CO+O$ à des températures différentes; les variations de température n'ont ici pour but que de faire varier la proportion d'humidité contenue dans le mélange et avec elle la *vitesse de réaction*.

Il est remarquable que notre théorie, même sous la forme approchée (50), (51), (52), (53), retrouve le sens de variation donné par l'expérience, comme on peut le voir par les exemples 1 et 2 de nos Tableaux. Nous nous sommes efforcés de faire les calculs de ces exemples d'une manière aussi comparable que possible, et, pour tenir compte de toutes les circonstances, partant d'une valeur admise pour ML à 10°, nous l'avons corrigée pour 100° par la formule de Kirchhoff. Il est bien certain que, pour trouver dans les vitesses une différence de 14^{m}, *nous avons dû faire nos calculs avec une précision hors de proportion avec la confiance qu'on peut accorder aux données expérimentales*. Mais cette manière de faire est parfaitement légitime quand on veut essayer de se rendre compte du sens d'une variation. On peut penser (sans que cela soit absolument sûr, bien

entendu) que la substitution des données exactes aux données approchées ne changerait pas ce sens. La diminution de vitesse indiquée par le calcul est plus faible que celle que donne l'expérience; mais notre calcul n'est qu'une première approximation.

Limites de détonation. — **40.** Prenons un mélange explosif, $H^2 + O$ par exemple, et diluons-le dans un gaz inerte, l'azote pour fixer les idées. Quand Az est en faible quantité, sa présence n'empêche pas la production de l'onde explosive; mais, à partir d'une certaine proportion, celle-ci est arrêtée. C'est le phénomène de la *limite de détonation*, découvert par MM. Berthelot et Vieille. D'après M. Dixon, dans le cas de $H^2 + O + n\,Az$, la limite de détonation est au voisinage de $n = 7$.

Nous n'avons pu rattacher ce phénomène à notre théorie avec toute la rigueur mathématique désirable; mais la remarque suivante, si incomplète qu'elle soit, nous semble indiquer dans quelle voie il faudrait en chercher l'explication.

En calculant par (50), (51), (52), (53) la vitesse de l'onde explosive dans le mélange $H^2 + O + 7\,Az$ pris à la température

$$T_1 = 273 + 10^\circ,$$

on trouve

$$T_2 = 2292, \tag{57}$$

$$\mu = 1{,}765, \tag{58}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 12{,}87, \tag{59}$$

$$\frac{dv}{dt} = 1659. \tag{60}$$

Or, cherchons quelle serait l'onde de choc qui porterait brusquement le mélange de $T_1 = 283^\circ$ à la température d'inflammation. Les expériences de MM. Mallard et Le Chatelier donnent pour la température d'inflammation de $H^2 + O$ $273^\circ + 555^\circ$ et montrent qu'elle varie peu par l'addition de gaz inertes. *Admettons encore qu'elle varie peu par la compression*, ce qui ne peut être qu'approximatif.

Nous pouvons alors adopter, pour le problème qui nous occupe relativement à $H^2 + O + 7Az$, le nombre $273 + 555$. La loi adiabatique d'Hugoniot permet de calculer quelle est la discontinuité en ρ qui porte le fluide à $273^\circ + 555^\circ$. On trouve que cette discontinuité est caractérisée par

$$(61) \qquad \mu = 4,14,$$

$$(62) \qquad \frac{p_2}{p_1} = 12,13.$$

Les valeurs (59) et (62) sont remarquablement voisines; elles le seraient davantage sans doute si l'on tenait compte, pour calculer (59), de la dissociation. Ainsi notre théorie, appliquée aux mélanges

$$H^2 + O + n\,Az$$

avec $n > 7$, donne une onde explosive pour laquelle $\frac{p_2}{p_1}$ tend à descendre au-dessous de la limite (62). Il n'y a rien d'étonnant à ce qu'une telle onde explosive ne puisse se propager. *La condition que* $\frac{p_2}{p_1}$ *soit supérieur à la limite* (62) *paraît être une condition de possibilité du problème.*

Nous ne nous dissimulons pas tout ce que les indications précédentes laissent à désirer au point de vue de la rigueur. Dans la quasi-onde Ss,

Fig. 18.



le mélange est d'abord porté à la température d'inflammation, puis brûlé; c'est sur la surface I que le gaz est à la température d'inflammation. On pourrait être tenté de préciser notre interprétation en

disant : « Sur la surface I, la pression doit être $12,13\,p_1$ et, par suite, la pression p_2 qui règne sur S doit être plus forte. » Un tel énoncé serait inacceptable : tout d'abord la pression en un point intérieur à la quasi-onde n'est pas définie, puisque la viscosité joue un rôle dans cette partie du fluide ; le serait-elle d'ailleurs qu'on n'aurait pas le droit d'appliquer la loi d'Hugoniot au calcul de la pression sur une surface intermédiaire entre S et *s*.

41. Pour cette même dernière raison, il est impossible de dire que sur I la densité doit avoir la valeur $4,14\rho_1$ donnée par (61). Il est donc impossible d'affirmer que la densité doit croître, dans l'espace *s*I, de ρ_1 à $4,14\rho_1$ pour décroître ensuite, dans l'espace IS, de $4,14\rho_1$ à $1,765\rho_1$. Il n'en est pas moins vrai qu'une croissance de la densité *suivie d'une décroissance* est possible, et nous croyons même probable. Il n'y aurait rien d'étonnant à ce que, quand le mélange brûle, il ait une tendance à l'expansion. Seulement la pression (et nous entendons ici par pression celle qui s'exerce sur un élément de surface parallèle à S*s*) doit croître dans toute la traversée de la quasi-onde. Si les choses se passent réellement ainsi, il y a, dans la quasi-onde, combustion très rapide avec $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ négatif. On remarquera qu'une telle combustion est toute naturelle pour les corps à *réaction vive* où le point ε existe sur (*a*), c'est-à-dire pour les corps qualifiés d'*explosifs* par M. Duhem.

42. A la question de la limite de détonation se rattache un phénomène observé et expliqué par M. Le Chatelier.

Reportons-nous à ce que nous avons dit sur la période d'établissement de l'onde explosive, pendant laquelle une flamme suit à quelque distance une onde de choc. Étudions ce phénomène pour un mélange au voisinage de la limite de détonation : « Dans le cas de l'oxyde de carbone et de l'oxygène... [1], l'onde explosive ne prend pas naissance spontanément, par conséquent elle ne se régénère plus une fois

---

[1] Le Chatelier, *Sur le développement et la propagation de l'onde explosive* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CXXX, 1900, p. 1757).

éteinte. On peut la provoquer au moyen d'une amorce de fulminate de 0g,05; mais, si la dose de fulminate est trop forte, 0g,75 par exemple, on ne l'obtient plus. L'onde comprimée produite par cette charge est trop rapide et ne peut être suivie par l'onde explosive du mélange gazeux qui reste en arrière et s'éteint, par suite de l'agitation de la masse gazeuse. »

Nous ne savons pas très bien ce qu'est exactement la flamme qui suit l'onde de choc. Admettons, comme nous l'avons dit (n° **31**, II), qu'elle est aussi une onde de choc. Dans la période d'établissement de l'onde explosive, l'élévation de pression se fait en deux échelons, dans l'onde de choc préalable et dans la flamme. Quand le mélange est près de la limite de détonation, il n'y a rien d'étonnant, d'après ce qu'on a vu au n° **40**, que le second échelon soit très inférieur au premier, et que, par suite, sa vitesse soit plus faible que celle du premier.

Quant au fait que l'agitation du mélange éteint la flamme, il est très naturel. Nous avons plusieurs fois insisté sur la nécessité, pour qu'il y ait *onde chimique*, que le point représentatif pénètre dans la région de combinaison, et que, par suite, la variation de ρ remplisse certaines conditions. Il n'y a pas à s'étonner si les alternatives de compression et de dilatation corrélatives de l'agitation du mélange font pénétrer le point représentatif dans la région des faux équilibres et, partant, éteignent la flamme.

§ 6. — Comparaison des diverses interprétations proposées pour l'onde explosive.

45. Nous allons essayer de comparer entre elles les diverses interprétations proposées pour l'onde explosive.

MM. Berthelot et Vieille ([1]) considèrent l'onde explosive comme une quasi-onde où la combustion est totale et ils estiment que la vitesse de l'onde explosive est égale à la vitesse cinétique moyenne des molécules dans les gaz brûlés. L'intervention, dans ce problème,

---

([1]) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XCIV, p. 149 et t. XCV, p. 151.

de la théorie cinétique des gaz sera considérée par les uns comme un avantage, par les autres, dont nous sommes, comme un inconvénient. Mais même les premiers devront reconnaître, croyons-nous, qu'il subsiste, contre l'interprétation de MM. Berthelot et Vieille, les trois objections suivantes :

1° On n'aperçoit aucune raison pour laquelle la vitesse de l'onde explosive doit être égale à la vitesse cinétique moyenne des molécules.

2° MM. Berthelot et Vieille, pour calculer la température des gaz brûlés, supposent que la combustion se fait, dans la quasi-onde, à pression constante, ce qui paraît peu probable.

3° Ils adoptent, pour les chaleurs spécifiques, des valeurs qui ne varient pas avec la température, ce qui est contraire à l'expérience.

Nous n'estimons donc pas que les calculs de MM. Berthelot et Vieille rendent inutile le Mémoire qui précède. D'ailleurs le succès partiel des vérifications numériques de ces savants se comprend assez bien dans notre théorie. La vitesse cinétique moyenne des molécules dans un gaz parfait est

$$\sqrt{3}\sqrt{\frac{k_2}{M}RT_2}. \tag{63}$$

Dans notre théorie, au moins sous sa forme simplifiée (50), (51), (52), (53), la vitesse de l'onde est

$$\mu\sqrt{1+\frac{k_2R}{Mc_2}}\sqrt{\frac{k_2}{M}RT_2}.$$

En moyenne, $\mu\sqrt{1+\frac{k_2R}{Mc_2}}$ vaut, dans nos calculs 1, 8, ce qui est un peu plus grand que $\sqrt{3}$. D'ailleurs $\sqrt{\frac{k_2}{M}RT_2}$ est un peu plus petit pour nous que pour M. Berthelot : en effet, notre procédé de calcul tend bien à augmenter T_2 par le fait que nous envisageons un mode de combustion spécial, défini par la loi d'Hugoniot, au lieu du mode à pression constante; mais, d'autre part, T_2 est abaissé par le fait que nous tenons compte de la croissance des chaleurs spécifiques avec la température, et c'est ce dernier effet qui l'emporte. Il y a compensation suffisante entre l'excès de $\mu\sqrt{1+\frac{k_2R}{Mc_2}}$ par rapport à $\sqrt{3}$ et l'in-

suffisance de notre T_2 par rapport à celui de MM. Berthelot et Vieille.

Cette compensation toutefois ne se maintient pas lorsque les gaz brûlés ont des chaleurs spécifiques peu variables avec la température, ce qui arrive notamment quand le mélange explosif est dilué dans des gaz inertes. M. Dixon a montré que la formule de MM. Berthelot et Vieille donne alors des nombres trop petits. Or c'est précisément dans ce cas seul que l'on peut considérer bien légitimement la combustion comme complète dans la quasi-onde et les chaleurs spécifiques comme suffisamment bien connues.

M. Dixon [1], développant des idées mises en avant par MM. Mallard et Le Chatelier, admet lui aussi que l'explosion se produit très vite, c'est-à-dire qu'il regarde l'onde explosive comme une quasi-onde où la combustion est complète, et il prend pour vitesse celle du son dans les gaz brûlés. Mais il prend cette vitesse *par rapport à un état initial qui n'est autre que l'état du fluide après la combustion*, c'est-à-dire qu'il exprime la vitesse de l'onde explosive par l'expression $\sqrt{\frac{k_2}{M}\left(1+\frac{k_2 R}{M c_2}\right) R T_2}$. Pourquoi la vitesse du son et pourquoi surtout cette vitesse rapportée à l'état initial que nous venons de dire? C'est ce que M. Dixon n'explique pas. Notre théorie montre au contraire que $\frac{dP}{dt}$ est bien la vitesse du son dans les gaz brûlés [équation (47) ou (47')], mais *rapportée à l'état initial qui précède la quasi-onde*. De là la présence, dans l'expression approchée de la théorie, du facteur μ devant $\sqrt{\frac{k_2}{M}\left(1+\frac{k_2 R}{M c_2}\right) R T_2}$ [équation (53)]. L'augmentation qui en résulte dans la valeur de la vitesse doit bien se retrouver quelque part dans les calculs de M. Dixon; et en effet ce savant propose, tout à fait arbitrairement, de calculer T_2 en doublant la température de combustion obtenue dans l'explosion à volume constant, et, de plus, il emploie des chaleurs spécifiques qui ne varient pas avec la température.

M. Schuster [2] a eu le premier l'idée importante d'appliquer au

---

(1) Dixon, *loc. cit.*

(2) *Loc. cit.*

problème de l'onde explosive les lois des ondes de choc. Mais ce qu'il dit est assez incomplet au point de vue physique. Il ne s'explique pas très nettement sur la question de savoir si la variable chimique varie ou ne varie pas à la traversée de l'onde; il ne paraît pas avoir connu la loi adiabatique d'Hugoniot, et il néglige entièrement le côté thermodynamique du sujet. Aussi ne parvient-il pas à une méthode permettant de calculer *a priori* la vitesse. Tout ce qu'il peut faire dans cette voie, c'est de calculer la vitesse dans les mélanges $H^2 + O + 5O$ et $H^2 + O + 5Az$, en supposant connue celle de $H^2 + O + 5H$, en admettant en outre, *arbitrairement*, que la discontinuité de la pression est la même pour les trois cas et que la densité en arrière de l'onde est très forte. Il est intéressant de remarquer que, si notre théorie est exacte sous sa forme approchée (50), (51), (52), (53), la première de ces hypothèses est vraie, mais la seconde fausse. Malgré cela, la vérification de M. Schuster réussit parce que son hypothèse sur la densité n'intervient dans son calcul que par le fait qu'elle rend la vitesse de l'onde inversement proportionnelle à la racine carrée de la masse moléculaire $\frac{M}{k_2}$. Or ce fait est également vrai dans notre théorie, comme on le voit par (53).

Les recherches de M. Duhem ([1]) sont les premières qui aient posé sur les principes de la Thermodynamique les bases d'une théorie rationnelle de la propagation des explosions. Les formules auxquelles il parvient dans le paragraphe 3 du Chapitre IV du Livre II de sa *Mécanique chimique* doivent être conservées dans une théorie complète de ce phénomène; ce sont celles des nos **19** à **22** du Chapitre II du présent Mémoire. Mais ce savant se trompe quand il dit que ce sont là les formules de l'*onde explosive*. Ainsi qu'il le fait remarquer lui-même, sa théorie suppose le mélange, avant l'onde, dans un état de faux équilibre limite. Elle n'explique pas ce qui se passe quand cette condition n'est pas réalisée, ce qui est le cas de l'expérience.

Robin, en reprenant la théorie de M. Duhem ([2]), a d'abord mis en lumière un point important : son indépendance vis-à-vis de certaines

---

([1]) *Loc. cit.*

([2]) *Thermodynamique générale.*

des hypothèses qui lui servaient de base; nous nous sommes efforcés de tirer parti de ces indications dans le Mémoire qui précède. Il a en outre cherché à combler la lacune que nous venons de signaler. Pour lui l'élévation préalable du gaz à la température d'inflammation est due à une petite influence de la conductibilité calorifique ([1]). Mais, s'il en est ainsi, il faut remarquer que le fluide ne saurait être considéré comme en repos avant l'ébranlement, ainsi que Robin le suppose ensuite ([2]) pour parvenir à sa formule définitive; il y a donc là, dans la théorie de Robin, une contradiction due sans doute à une inadvertance. D'autre part, il est fort peu probable que la conductibilité puisse avoir l'influence qui lui est attribuée. Les gaz étant très peu conducteurs, il paraît bien difficile que le mouvement de la chaleur dû à une telle cause précède, comme cela est nécessaire, une onde qui marche à plus de 2000ᵐ par seconde. Le rôle de la conductibilité ne saurait être sensible que si la variation de température est très grande sur une faible étendue. On est ainsi conduit assez naturellement à l'idée de la discontinuité dans la température et de la quasi-onde de choc.

M. Vieille ([3]) a vivement insisté sur le fait que la théorie de M. Duhem devait être complétée par la considération des ondes de choc, chargées, dans sa manière de voir, de porter préalablement le gaz à sa température d'inflammation. M. Duhem a fait remarquer que cette manière de voir n'était pas entièrement nécessaire et qu'on pouvait supposer que l'onde explosive était précédée par un mouvement analytique jusqu'à l'infini ([4]). Mais les expériences de M. Le Chatelier ont, selon nous, donné raison à M. Vieille et montré qu'il fallait, avec lui, recourir à la conception de M. Schuster.

44. Les interprétations que nous avons développées dans le présent Mémoire résultent en effet de l'introduction des idées de MM. Schuster et Vieille dans la théorie des explosions de M. Duhem.

Nous en avons donné deux (§ 4 et § 5); l'une est caractérisée par

---

([1]) *Loc. cit.*, p. 207, note.

([2]) *Loc. cit.*, p. 212.

([3]) *Loc. cit.*

([4]) *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 2ᵉ série, t. XXV, 1901.

l'hypothèse que la combustion est nulle dans la quasi-onde de choc; l'autre suppose au contraire que cette combustion est notable. Mais toutes les deux reposent sur les idées fondamentales suivantes :

1° La vitesse de l'onde explosive est constante, ce qui s'exprime par la formule (35) du présent Chapitre pour le cas des ondes planes.

2° La loi adiabatique d'Hugoniot s'applique aux fluides où il y a une variable chimique, même si cette variable change à la traversée de l'onde. Dans ce dernier cas, elle définit *le mode de combustion* dans l'onde et montre que ce mode n'est ni à pression constante, comme le supposait M. Berthelot, ni à volume constant comme paraissait le supposer M. Dixon. [*Voir* la forme de l'équation (51).]

La première théorie donne une vitesse qui dépend de la manière dont les gaz se détendent en arrière de l'onde et qui, par là, doit varier avec les *conditions aux limites* auxquelles est soumise la masse fluide. A ce point de vue l'avantage est à la seconde théorie qui semble en outre confirmée par les vérifications approchées auxquelles nous avons pu la soumettre.

Il y a un autre point, susceptible peut-être de se prêter à des expériences vérificatives, sur lequel nos deux théories conduisent à des résultats différents.

Dans la seconde, les pressions en arrière de l'onde sont en général deux fois plus fortes environ que celles que l'on obtient par la détonation en vase clos. Dans la première, une onde de choc sans variation de α qui aurait, dans des gaz parfaits, une vitesse de 2820^m (vitesse de l'onde explosive dans $H^2 + O$) serait caractérisée par $\frac{p_2}{p_1} = 34,29$, et p_2 serait ainsi deux fois plus fort environ que dans la seconde. C'est aux expérimentateurs à dire si l'on peut mesurer ces pressions instantanées avec assez de précision pour conclure. Mais il ne faut pas oublier qu'il s'agit ici de l'onde explosive en *régime uniforme* et nullement de la période d'établissement de cette onde; dans cette dernière période, il n'y a rien d'impossible, dans notre seconde théorie, à ce qu'on ait des pressions plus élevées.

D'ailleurs, en présence de ces deux théories supposant l'une que la combustion est nulle, l'autre qu'elle est très grande dans la quasi-onde, nous avons une forte tendance à croire que la vérité est entre

les deux. Nous pensons que la vitesse de la réaction chimique, presque partout assez grande pour pouvoir être considérée comme infinie, cesse pourtant de l'être quand la combinaison est suffisamment avancée, ce qui explique le succès des expériences fondées sur le refroidissement brusque sans néanmoins s'opposer à l'existence des quasi-ondes avec variation finie de α. Dès lors l'équation (35) doit être écrite sous la forme (40) comme dans la première théorie, seulement le terme en $\dfrac{\tau_1 g}{\frac{\partial \rho_2}{\partial t}}$ est faible au lieu d'être prépondérant; de la sorte (40) s'identifie à peu près avec (41) ou, plus exactement, avec (47), puisque α_2 est différent de α_1, et l'on retombe ainsi sur les calculs de la seconde théorie.

§ 7. — La propagation de la combustion.

Y a-t-il onde de choc? — 43. Nous avons laissé en suspens la question de savoir si la propagation lente étudiée par MM. Mallard et Le Chatelier, ou encore, comme on dit, la propagation de *la combustion*, par opposition à l'onde explosive qui est celle de *la détonation*, ne pouvait pas s'expliquer, conformément à une idée émise par ces deux savants, par une onde avec discontinuité dans la température.

S'il en est ainsi, on peut appliquer les résultats de l'article **10**. L'onde doit être une quasi-onde dont l'épaisseur soit d'un ordre de petitesse au plus égal à celui de $\frac{K}{D'}$, D' étant la vitesse de propagation. D' est beaucoup plus faible que la vitesse D de l'onde explosive; la limite imposée à l'épaisseur de la quasi-onde est donc assez élevée. Dans ces conditions, il est fort probable que l'approximation qui consiste à considérer cette épaisseur comme infiniment petite du second ordre (**9**) est beaucoup moins satisfaisante ici que dans l'étude de l'onde explosive, et qu'il en est de même de celle qui suppose négligeable la chaleur traversant, pendant le temps $\frac{dP'_1}{D'}$, la surface $\beta\gamma\beta_1\gamma_1$ (*voir* article **10** *in fine*). On peut même se demander si ces deux approximations sont encore légitimes.

Continuons à faire, malgré les remarques qui précèdent, ces appro-

ximations qui conduisent aux formules (14), (15), (16), (17), (18). Pouvons-nous avoir encore recours aux considérations du paragraphe 2 pour expliquer l'uniformité observée dans la vitesse? Il n'en est rien. D'abord la vitesse observée est $\frac{dH}{dt}$, et ici le mouvement qui précède la flamme donne au gaz des vitesses comparables à celle de la flamme, de sorte que, si $\frac{dH}{dt}$ se montre uniforme, il n'en est pas de même de $\frac{dV}{dt}$. En second lieu cette uniformité n'est certainement pas essentielle puisqu'elle se trouble toujours spontanément au bout d'un certain temps, d'ailleurs très faible ([1]). Enfin, si l'uniformité de la vitesse résultait de l'égalité entre la vitesse de l'onde de choc et celle des ondes ordinaires dans le milieu qui la suit, les conditions aux limites en arrière de la flamme n'auraient aucune influence sur la vitesse de propagation, car les mouvements qu'elles détermineraient par réflexion n'atteindraient pas la flamme. Or c'est ce qu'on n'observe pas, puisque, quand on allume le gaz à l'extrémité d'un tube fermé, la vitesse n'est pas uniforme mais croissante ([2]). On sait au contraire que la même expérience, faite avec l'onde explosive, ne trouble pas la vitesse de celle-ci.

Nous pensons donc que l'uniformité constatée par MM. Mallard et Le Chatelier dans la vitesse de la flamme aux premiers instants de la propagation, après inflammation à l'extrémité d'un tube ouvert, n'est qu'approximative et *tient en grande partie aux conditions aux limites spéciales auxquelles se trouvent soumis les gaz brûlés dans ce cas.* Pour arriver à l'expliquer, il faudrait faire intervenir ces conditions aux limites et l'on se trouverait ainsi en présence d'un problème d'un ordre beaucoup plus relevé que ceux qui ont été traités dans le présent Mémoire.

Voyons néanmoins où nous conduiraient ici les considérations du paragraphe 5 qui, si elles ne sont pas rigoureusement applicables, le sont *peut-être* approximativement. Nous retomberions sur le problème de l'article **33**. Or ce problème a deux solutions, car l'équation (52)

([1]) Le temps pendant lequel a été observée l'uniformité de la vitesse de l'onde explosive n'est pas plus long, il est vrai. Mais toujours est-il que, dans ce cas, on n'a pas observé que cette uniformité s'altérât spontanément.

([2]) MALLARD et LE CHATELIER, *loc. cit.*, p. 340.

a deux racines en μ. Nous n'avons considéré jusqu'ici que la première. Dans le cas de $H^2 + O$ avec $T_1 = 283$, la seconde est

$$\mu = 0{,}06, \qquad \frac{\rho_2}{\rho_1} = 0{,}48, \qquad T_2 = 3420, \qquad \frac{dV}{dt} = 78^{m} \text{ par seconde.}$$

La vitesse obtenue est bien plus grande que la vitesse expérimentale [1], même si l'on a égard au fait que l'expérience donne $\frac{d\Pi}{dt}$ et non $\frac{dV}{dt}\cdot$ Ce résultat prouve suffisamment que la théorie du paragraphe 5, au moins sous sa forme simplifiée où l'on néglige la dissociation, n'est pas applicable ici. Si la flamme est une onde de choc, comme il faut que (18) donne une vitesse égale à celle que fournit l'observation, il est de toute nécessité que la variation de pression y soit très faible; elle est trop forte dans la théorie précédente. Il nous a paru néanmoins intéressant d'attirer l'attention sur cette seconde solution du problème traité plus haut (**55**), solution qui donne une vitesse incomparablement plus basse que la première et pour laquelle l'onde présente *une chute brusque*, et non plus une augmentation brusque, de densité et de pression.

Il se pourrait que cette dernière circonstance se présentât en effet dans le phénomène sans que pour cela l'interprétation ci-dessus fût exacte en son entier. On remarquera qu'une onde de choc présentant à la fois une dilatation et une combustion se comprend surtout si le point ε existe sur (a), c'est-à-dire si le corps, supposé à réaction vive, est *explosif* au sens de M. Duhem.

Si la flamme est bien une onde de choc, il ne faut pas compter sur l'accroissement de pression pour porter le gaz à son point d'inflammation puisque p_2 est très voisin de p_1 et qu'il peut même lui être inférieur. Cette élévation préalable de température ne peut être obtenue que par la conductibilité et l'on sait, en effet, que celle-ci peut jouer un rôle d'autant plus important dans la quasi-onde que D' est relativement petit (**10**).

C'est là tout ce que nous avons pu tirer de l'hypothèse que la

---

(1) Mallard et Le Chatelier, *loc. cit.*, p. 328 et suiv.

propagation de la combustion dans les expériences de MM. Mallard et Le Chatelier se fait par une onde de choc. Nos résultats sont beaucoup trop vagues pour départager l'esprit entre elle et celle qui a été exposée à l'article **51** du Chapitre II.

Limites d'inflammabilité. — **46.** MM. Mallard et Le Chatelier ont fait une remarque très importante qui montre bien le rôle de la conductibilité dans la propagation de l'inflammation ([1]). Cette remarque, d'ailleurs, s'applique au cas où il y a onde ordinaire aussi bien, quoique un peu moins clairement, qu'au cas où il y a onde de choc.

La chaleur ne se propage jamais que des températures hautes vers les températures basses. Il est donc assez naturel de penser (il est évident que tout ceci manque de rigueur mathématique) que, si la température de combustion du mélange est égale à celle d'inflammation, la conductibilité cesse de pouvoir élever le gaz en avant de l'onde à son point d'inflammation. Prenons, par exemple, *pour un raisonnement* GROSSIER, le cas où il y a discontinuité dans les températures ([2]). Une surface S sépare les gaz froids des gaz brûlés. La première tranche des gaz froids, SS_1, est à la température *ordinaire* T_1.

Fig. 19.



La première tranche des gaz brûlés, SS_2, est à une température T_2. Scindons le phénomène de la propagation en deux. Commençons par

---

([1]) MALLARD et LE CHATELIER, *loc. cit.*, p. 347.

([2]) Ce qui suit est la reproduction du raisonnement donné par MM. Mallard et Le Chatelier, p. 343 et suiv. Nous y avons introduit toutefois quelques modifications pour tenir compte du fait que, à notre avis, s'il y a quasi-onde de choc, la conductibilité ne peut que jouer un rôle négligeable en dehors de cette quasi-onde.

supposer que la tranche SS_2 *réchauffe* par conductibilité la tranche SS_1. La conductibilité n'étant sensible que dans la quasi-onde, les tranches situées de part et d'autre de S_2 et de S_1 n'interviennent pas. La température de la tranche SS_1 s'élève à la température d'inflammation τ. Puis, deuxième temps, cette tranche brûle *spontanément* et sa température atteint T_2. T_2 est la température de combustion calculée à partir de la température τ. Mais on remarquera que, pendant le premier temps, lorsque S_2S réchauffe SS_1, la température de S_2S baisse de T_2 à Θ, et, si les deux tranches sont égales en masse, Θ est manifestement la température de combustion calculée à partir de la température initiale T_1. Il paraît évident que le phénomène analysé comme on vient de le faire ne peut se produire si $\Theta < \tau$.

Quoi qu'il en soit de cette indication, l'intuition de MM. Mallard et Le Chatelier se vérifie remarquablement. *L'inflammation cesse en effet de se propager dans les mélanges dont la composition est telle que* $\Theta = \tau$. C'est le phénomène de *la limite d'inflammabilité*.

Il convient de préciser d'ailleurs que la température de combustion doit être calculée en supposant une réaction *adiabatique à pression constante*. Cela est tout naturel, puisqu'il est certain que la pression est peu variable dans le phénomène de Mallard et Le Chatelier. Voici quelques chiffres.

La limite d'inflammabilité des mélanges de H et d'air est obtenue pour 6 pour 100 d'hydrogène. Or c'est le mélange à 6,6 pour 100 qui donne $\Theta = \tau = 273 + 555$. Pour le formène et l'air, le mélange limite est à 5,6 pour 100 de formène et donne $\Theta = 273 + 1000$; or, c'est bien là (**I, 7**) la température d'inflammation qu'il faut adopter pour le formène quand on étudie des phénomènes relativement rapides [1].

Cette explication des limites d'inflammabilité, donnée par Mallard et Le Chatelier, est à rapprocher de celle qui a été donnée plus haut (**40**) pour les limites de détonation. La détonation (onde explosive) se propage par un phénomène mécanique, la compression des tranches successives les unes par les autres; la combustion se propage

---

[1] Il y a des limites *supérieures* d'inflammabilité, correspondant au cas où c'est l'air qui est en faible quantité et le gaz combustible en excès. Ces limites supérieures vérifient encore la remarque de MM. Mallard et Le Chatelier.

par un phénomène calorifique, l'échauffement des tranches successives les unes par les autres. Pour que la propagation soit possible, c'est la tension mécanique (pression) dans le premier cas, la tension calorifique (température) dans le second, qui doit être suffisante pour porter le gaz en avant de l'onde à sa température d'inflammation.

Période du mouvement vibratoire. — **47.** La propagation qui se fait pendant la *période du mouvement vibratoire* n'est autre chose que la propagation d'une combustion dans un gaz violemment agité [1]. La vitesse $\frac{d\Pi}{dt}$, qui est celle qu'on observe, est alors très variable et change même de sens. Ce genre de mouvement paraît être à la *combustion* ce que la période d'établissement de l'onde explosive est à la *détonation*. Il peut arriver que la flamme s'éteigne spontanément dans les mouvements vibratoires, comme elle peut s'éteindre dans la période d'établissement de l'onde explosive (**42**) et l'explication de ces deux phénomènes est la même ; ce sont sans doute les alternatives de compression et de dilatation du gaz qui arrivent à faire pénétrer le point représentatif de son état dans la région des faux équilibres et qui peuvent ainsi produire un recul de la flamme par rapport à la matière du fluide. D'ailleurs certaines extinctions sont dues aussi à une autre cause, expliquée par MM. Mallard et Le Chatelier, la présence de gaz brûlés adhérant aux parois du tube [2].

---

(1) Mallard et Le Chatelier, *loc. cit.*, p. 355.

(2) Mallard et Le Chatelier, *loc. cit.*, p. 351.

Sur les fonctions ayant un nombre fini de branches;

PAR M. GEORGES RÉMOUNDOS.

Préface.

1. J'appellerai *algébroïde* toute fonction ayant un nombre fini de branches dans tout le plan. L'étude des zéros de ces fonctions m'a déjà conduit aux théorèmes remarquables communiqués autrefois à l'Académie des Sciences de Paris, qui constituent une extension du théorème bien connu de M. Picard et de ses généralisations aux fonctions algébroïdes [1].

J'ai, à plusieurs reprises, signalé le théorème fondamental de M. Borel, qui m'a servi de base et dont l'importance n'était pas remarquée avant mes recherches.

Dans ce petit Mémoire, je commence par établir une extension très intéressante de ce théorème de M. Borel concernant des identités de forme analogue à celles de M. Borel, dont les exposants et les coefficients ne sont plus des fonctions uniformes.

J'en déduis, dans le second Chapitre, quelques résultats remarquables qui complètent ceux que j'ai obtenus dans mes travaux anté-

[1] Voir *Comptes rendus*, 20 avril 1903; 8 février, 20 juin, 8 août 1904; 8 mai 1905; et *Bulletin de la Société mathématique*, 1904, fascicule I et 1905, fascicule III.

rieurs. J'obtiens enfin un théorème sur les algébroïdes satisfaisant à une équation différentielle du premier ordre.

CHAPITRE I.

LA CROISSANCE DES FONCTIONS ALGÉBROÏDES. UN THÉORÈME GÉNÉRAL.

2. *Le module maximum.* — Je démontrerai d'abord que tous les théorèmes bien connus sur le module maximum et minimum et sur la croissance de la dérivée s'étendent aux fonctions algébroïdes. Pour fixer nos idées, considérons une fonction algébroïde d'ordre *fini*, donnée par l'équation suivante :

$$(1)\quad u^\nu + A_1(z)u^{\nu-1} + A_2(z)u^{\nu-2} + \ldots + A_{\nu-1}(z)u + A_\nu(z) = 0.$$

Nous appelons *ordre* de la fonction algébroïde $u = a(z)$ le plus grand des ordres des coefficients $A_1(z)$, $A_2(z)$, ..., $A_\nu(z)$; soit ρ cet ordre. Si $M(r)$ désigne le module maximum d'une branche quelconque de $a(z)$, il est facile de démontrer que l'inégalité

$$(2)\qquad M(r) < e^{r^{\rho+\varepsilon}}$$

est satisfaite à partir d'une certaine valeur de r et que l'inégalité

$$(2')\qquad M(r) > e^{r^{\rho-\varepsilon}}$$

sera satisfaite pour une infinité de valeurs de r croissantes indéfiniment. En effet, écrivons l'équation (1) de la façon suivante :

$$(2)\qquad u^\nu\left[1 + A_1(z)\frac{1}{u} + A_2(z)\frac{1}{u^2} + \ldots \right.$$
$$\left. + A_{\nu-1}(z)\frac{1}{u^{\nu-1}} + A_\nu(z)\frac{1}{u^\nu}\right] = 0.$$

et remarquons que, s'il y avait une infinité (I) de valeurs de r satisfaisant à l'inégalité

$$M(r) > e^{r^{\rho+\varepsilon}},$$

ε étant un nombre fixe, aussi petit que l'on voudra, pour cette série de valeurs de r, les termes $A_1(z)\frac{1}{u}$, $A_2(z)\frac{1}{u^2}$, $\cdots$ tendraient vers zéro avec $\frac{1}{r}$ et l'équation (2) ne serait pas du tout satisfaite.

De plus, si l'inégalité

$$M(r) < e^{r^{\rho-\varepsilon}}$$

était satisfaite à partir d'une certaine valeur de r et pour toutes les branches, il en serait de même des fonctions entières $A_1(z)$, $A_2(z)$, ..., $A_\nu(z)$ qui satisferaient à une inégalité

$$(3) \qquad M_i(r) < e^{r^{\rho-\varepsilon_i}} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, \nu),$$

$M_i(r)$ étant le module maximum de $A_i(z)$, et ε_i un nombre positif. Cela résulte bien des relations bien connues entre les fonctions entières $A_i(z)$ et les diverses branches de la fonction multiforme. Mais les inégalités (3), satisfaites à partir d'une certaine valeur de r, sont en contradiction avec notre hypothèse que les coefficients $A_1(z)$, $A_2(z)$, $\ldots$, $A_\nu(z)$ ne sont pas tous d'ordre inférieur à ρ.

Ces résultats justifient bien la définition d'*ordre* que nous avons donnée pour les fonctions algébroïdes.

5. Il est utile pour la suite de chercher une limite inférieure de l'étendue des arcs du cercle de rayon r, sur lesquels une branche de la fonction algébroïde satisfait à l'inégalité (2').

A cet effet, nous allons démontrer que, si une branche $u = a_1(z)$ satisfait à l'inégalité (2') pour un point de module assez grand, il en sera de même de l'un, au moins, des coefficients $A_i(z)$ [1].

La démonstration est facile : si, pour cette valeur $z = z_0$, on avait

$$|A_i(z)| < K e^{r^{\rho-\varepsilon_1}}, \qquad K < 1 \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, \nu),$$

l'équation ne saurait être satisfaite pour $r = |z_0|$ assez grand.

En effet, reportons-nous à l'équation (1) écrite sous la forme (2) et

---

[1] Pourvu que l'on remplace ε par un nombre ε_1 plus grand que ε mais quelconque.

remarquons que l'on aurait

$$\left|A_1(z)\frac{1}{u}+A_2(z)\frac{1}{u^2}+\ldots+A_\nu(z)\frac{1}{u^\nu}\right|<K\left(e^{r^{\rho-\varepsilon_1}-r^{\rho-\varepsilon}}+e^{r^{\rho-\varepsilon_1}-2r^{\rho-\varepsilon}}+\ldots\right)$$

et

$$\left|A_1(z)\frac{1}{u}+\ldots+A_\nu(z)\frac{1}{u^\nu}\right|<K\left[e^{r^{\rho-\varepsilon_1}(1-r^{\varepsilon_1-\varepsilon})}+e^{r^{\rho-\varepsilon_1}(1-2r^{\varepsilon_1-\varepsilon})}+\ldots\right].$$

Si $\varepsilon_1>\varepsilon$, le second membre tend visiblement vers zéro et sera, à partir d'une certaine valeur de r, inférieur à $\frac{1}{K}$ et l'on aura

$$\left|A_1(z_0)\frac{1}{u}+\ldots+A_\nu(z_0)\frac{1}{u^\nu}\right|<K\frac{1}{K}.$$

Dès lors, il est clair que l'équation n'est pas satisfaite pour un tel point de module assez grand.

Il en résulte donc que tous les points satisfaisant à l'inégalité

$$|a(z)|>e^{r^{\rho-\varepsilon}}$$

satisfont aussi à l'une, au moins, des inégalités

$$|A_i(z)|>e^{r^{\rho-\varepsilon_1}}\qquad [i=1, 2, 3, \ldots, \nu],$$

$a(z)$ désignant une branche de la fonction algébroïde et ε_1 un nombre positif plus grand que ε, mais quelconque.

Appelons U_ε l'ensemble des points du cercle de rayon r, pour lesquels une, au moins, des branches de la fonction algébroïde satisfait à l'inégalité

$$(4)\qquad |a(z)|>e^{r^{\rho-\varepsilon}}$$

et E_ε l'ensemble des points pour lesquels un, au moins, des coefficients $A_i(z)$ satisfait à l'inégalité

$$(5)\qquad |A_i(z)|>e^{r^{\rho-\varepsilon}}.$$

Nous avons donc démontré que *tout point de U_ε appartient aussi à E_{ε_1}, ε_1 étant un nombre quelconque supérieur à ε.*

Nous allons établir maintenant la réciproque

Soit z_0 un point du cercle de rayon r satisfaisant à l'inégalité (5), $A_i(z)$ étant un des coefficients de l'équation (1).

Si, pour ce point, toutes les branches de la fonction algébroïde satisfaisaient à l'inégalité

$$|a(z)| < e^{r^{\rho-\varepsilon_1}},$$

tous les coefficients $A_i(z)$ satisferaient à l'inégalité

$$|A_i(z)| < e^{r^{\rho-\varepsilon_2}} (\varepsilon_2 < \varepsilon_1),$$

ce qui est en contradiction avec notre hypothèse, si l'on a $\varepsilon_2 > \varepsilon$ et, par conséquent, $\varepsilon_1 > \varepsilon$.

Nous en concluons le théorème suivant qui est la réciproque du précédent :

Théorème. — *Tout point de l'ensemble* E_ε *appartient aussi à l'ensemble* U_{ε_1}, ε_1 *étant un nombre positif quelconque supérieur à* ε.

Donc, la mesure de l'ensemble E_ε *ne saurait dépasser celle de l'ensemble* $U_{\varepsilon_1} (\varepsilon_1 > \varepsilon)$.

Or, je démontre dans ma thèse [1] que la mesure de l'ensemble E_ε est plus grande qu'une certaine puissance finie de r; il en sera donc de même de l'ensemble U_{ε_1}. Donc, l'ensemble U_ε, même lorsqu'il tend vers zéro avec $\frac{1}{r}$ (sa mesure), la longueur totale des arcs qui le constituent est comparable à une puissance finie de r dont l'exposant ne dépend pas de r.

4. *Le module minimum.* — Nous allons maintenant étendre le théorème de M. Hadamard (sur le module minimum) aux fonctions algébroïdes. Il est aisé de démontrer que *toutes les branches* de $a(z)$

(1) Thèse de doctorat : *Sur les zéros d'une classe de fonctions transcendantes*, deuxième Partie, p. 64-66 (Gauthier-Villars), et *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*.

satisfont à l'inégalité

$$(6) \qquad |a(z)| > e^{-r^{\rho+\varepsilon}},$$

les intervalles d'exclusion étant aussi bien négligeables que ceux qui concernent les fonctions entières.

Supposons, en effet, qu'il n'en soit pas ainsi pour une branche quelconque $u_1 = a_1(z)$ et que, pour un point $z = z_0$ de module assez grand, on ait

$$|a_1(z)| < e^{-r^{\rho+\varepsilon_1}} \qquad (\varepsilon_1 < \varepsilon),$$

il en résulterait

$$|A_k(z)[a_1(z)]^{\nu-k}| < e^{-r^{\rho+\varepsilon_1}(\nu-k)} e^{r^{\rho+\delta}} < e^{-r^{\rho+\varepsilon_2}},$$

δ étant un nombre positif arbitrairement petit et $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$.

Cela acquis, l'équation

$$[a_1(z)]^\nu + A_1(z)[a_1(z)]^{\nu-1} + \ldots + A_{\nu-1}(z)\, a_1(z) + A_\nu(z) = 0$$

montre que ce point $z = z_0$ appartient à un arc d'exclusion pour la fonction entière $A_\nu(z)$, c'est-à-dire à l'ensemble des points du cercle de rayon r, qui satisfont à l'inégalité

$$(7) \qquad |A_\nu(z)| < e^{-r^{\rho+\varepsilon_3}} \qquad (\varepsilon_3 < \varepsilon_2).$$

Nous en déduisons le théorème suivant :

Si l'on exclut du cercle de rayon r certains arcs dont la longueur totale tend vers zéro avec $\frac{1}{r}$ *comme* e^{-r^α} *(*α *étant un nombre positif quelconque et inférieur à* ε*), tous les autres points du cercle satisfont à l'inégalité* (6), *et cela pour toutes les branches de la fonction multiforme* $a(z)$.

Ce théorème est l'extension de celui que j'ai établi tout récemment pour les fonctions entières de genre fini dans une Note du *Bulletin de la Société mathématique de France* (t. XXXII, 1904, p. 314), et qui constitue une extrême précision du théorème bien connu de M. Hadamard sur le module minimum.

5. *La croissance de la dérivée.* — La dérivée d'une fonction algébroïde est aussi algébroïde et se trouve déterminée par l'équation qui résulte de l'élimination de u entre l'équation (1) et la suivante :

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} & u'^{\nu} + A'_1(z)u^{\nu-1} + \ldots + A'_{\nu-1}(z)u + A'_{\nu}(z) \\ & \quad + u'[\nu u^{\nu-1} + (\nu-1)u^{\nu-2}A_1(z) + \ldots + A_{\nu-1}(z)] = 0. \end{aligned}\right.$$

Une fonction entière ayant le même ordre avec sa dérivée, nous voyons immédiatement que la dérivée $a'(z)$ ne saurait avoir un ordre supérieur à celui de la fonction algébroïde $a(z)$.

La dérivée $a'(z)$ satisfait donc aux inégalités

$$(9)\qquad e^{-r^{\rho+\varepsilon}} < |a'(z)| < e^{r^{\rho+\varepsilon}}, \qquad M_1(r) > e^{r^{\rho-\varepsilon}},$$

les deux premières pour toutes les branches et la troisième pour une, au moins, des branches, dans les mêmes conditions et avec des intervalles d'exclusion (ou arcs d'exclusion) analogues à ceux de la fonction $a(z)$.

Les résultats précédents montrent que la croissance des fonctions algébroïdes jouit des mêmes propriétés fondamentales que celle des fonctions entières.

6. *Les fonctions algébroïdes d'ordre infini.* — Nous obtenons des résultats analogues pour les fonctions algébroïdes d'ordre infini, à savoir :

Si tous les coefficients $A_i(z)$ de l'équation (1) satisfont à l'inégalité

$$(10)\qquad |A_i(z)| < e^{[\mu(r)]^{1+\alpha}},$$

et que le module maximum $M(r)$ de l'une, au moins, d'entre elles, satisfasse à l'inégalité

$$(11)\qquad M(r) > e^{[\mu(r)]^{1-\alpha}}$$

(α un nombre positif arbitrairement petit) pour une infinité de valeurs de r croissant indéfiniment, la fonction algébroïde $a(z)$

satisfera aux inégalités

$$(12)\qquad \begin{cases} e^{-[\mu(r)]^{1-\varepsilon}} < |a(z)| < e^{[\mu(r)]^{1+\varepsilon}}, \\ \qquad\qquad m(r) > e^{[\mu(r)]^{1-\varepsilon}}; \end{cases}$$

les deux premières pour toutes les branches de $a(z)$ et la troisième pour une, au moins, des branches, $m(r)$ désignant le module maximum d'une branche de $a(z)$ et ε un nombre positif arbitrairement petit.

Pour l'inégalité

$$|a(z)| > e^{[\mu(r)]^{1+\varepsilon}},$$

il y a des intervalles d'exclusion (sur l'axe des modules $r = |z|$) dont la grandeur se trouve limitée à l'aide d'un résultat remarquable de M. Albert Kraft, dont je me suis déjà servi dans ma Thèse [*Ueber ganze transcendente Functionen von unendlicher Ordnung* (*Inaugural Dissertation*, 1903, Universität zu Göttingen)]. Si l'on remplace, avec M. Kraft, les inégalités (10) et (11) par les suivantes

$$(13)\qquad |A_i(z)| < e^{r^{P(r)^{1+\alpha}}}, \qquad M(r) > e^{-r^{P(r)^{1+\alpha}}},$$

on aura à la place des (12) les inégalités suivantes :

$$(14)\qquad \begin{cases} e^{-r^{P(r)^{1+\varepsilon}}} < |a(z)| < e^{r^{P(r)^{1+\varepsilon}}}, \\ \qquad\qquad m(r) > e^{r^{P(r)^{1-\varepsilon}}}; \end{cases}$$

et les intervalles d'exclusion concernant l'inégalité

$$|a(z)| > e^{-r^{P(r)^{1+\varepsilon}}}$$

et situés entre r et $2r$ ont une étendue totale inférieure à $\frac{1}{P(r)}$.

Je tiens aussi à signaler un autre résultat très intéressant dû aux calculs de M. Kraft (*Inaugural-dissertation*, p. 74) et qui nous servira dans la suite :

Considérons une exponentielle $e^{\mu z}$ croissant plus vite que les coef-

ficients $A_i(z)$ de l'équation (1). Le résultat annoncé est le suivant :

A partir d'une valeur r_0 de r, pour laquelle on ait l'inégalité

$$\mathrm{Max}\,|e^{H(z)}| > e^{r^{P(r)^{1+\alpha}}},$$

l'inégalité

$$(15) \qquad \mathrm{Max}\,|e^{H(z)}| > e^{r^{P(r)^{1-\alpha_1}}} \qquad (\alpha_1 < \alpha)$$

est satisfaite dans un intervalle d'étendue égale à

$$\frac{1}{\log P(r_0)}.$$

A l'aide de ce théorème, M. Kraft a précisé la démonstration donnée par M. Borel pour son théorème fondamental, qui a servi de base dans mes recherches sur les zéros des fonctions multiformes et auquel j'ai fait allusion dans la préface de ce travail (travail cité, p. 63-75).

Des raisonnements analogues à ceux du n° 5 montrent que ce théorème s'étend aux fonctions algébroïdes d'ordre infini, si l'on tient compte de ce que l'ordre de grandeur d'une fonction algébroïde n'est autre chose que le plus grand des ordres de grandeur des coefficients $A_i(z)$ de l'équation qui la définit.

En ce qui concerne la dérivée d'une fonction algébroïde d'ordre infini, il est clair que sa croissance jouit de propriétés analogues à celles que nous avons établies pour les algébroïdes d'ordre fini.

7. *Un théorème sur les fonctions algébroïdes.* — Le théorème fondamental de M. Borel, que nous avons appliqué dans nos recherches, s'étend aux fonctions algébroïdes et prend la forme suivante :

Une identité de la forme

$$(16) \qquad a_1(z)e^{H_1(z)} + a_2(z)e^{H_2(z)} + \ldots + a_n(z)e^{H_n(z)} = 0,$$

où les fonctions algébroïdes $a_i(z)$ *croissent moins vite que* $e^{r^{P(r)}}$, *tandis que les fonctions aussi* algébroïdes $H_i(z) - H_k(z)$ *croissent plus vite que* $r^{P(r)^{1+\alpha}}$, *entraîne la nullité de tous les coefficients* $a_i(z)$.

Une fois les propriétés fondamentales de croissance des fonctions entières étendues aux fonctions algébroïdes, la démonstration de ce théorème est *identique* à celle du théorème analogue de M. Borel [cas où les fonctions algébroïdes $a_i(z)$ et $H_i(z)$ sont uniformes].

Je crois donc qu'il est tout à fait inutile de répéter ici la démonstration, et je renvoie le lecteur aux travaux de MM. Borel et Kraft [Borel, *Sur les zéros des fonctions entières* (*Acta mathematica*, t. XX), et Albert Kraft, *Ueber ganze transcendente Functionen von unendlicher Ordnung* (*Inaugural Dissertation*, Gœttingen, 1903)].

Il n'y a qu'un point que je veux préciser ici; je me bornerai, pour fixer les idées, au cas où les coefficients $a_i(z)$ et les exposants $H_i(z)$ désignent des algébroïdes d'ordre fini.

Reportons-nous aux notations du n° 5, et rappelons-nous que l'ensemble U_{ε_1} a une mesure qui n'est pas inférieure à celle de $E_\varepsilon[\varepsilon_1 > \varepsilon]$. L'ensemble U_{ε_1} a donc une mesure supérieure à une puissance finie r^k de r.

Si je désigne par $\overline{U}_{\varepsilon_1}$ le plus grand (par rapport à la mesure) des ν ensembles correspondant aux ν diverses branches et définis par les inégalités

$$(17) \qquad |a_i(z)| > e^{r^{\rho-\varepsilon_1}} \qquad [i = 1, 2, 3, \ldots, \nu],$$

il est clair que la mesure de $\overline{U}_{\varepsilon_1}$ n'est pas inférieure à $\frac{1}{\nu} r^k$. En effet, s'il en était ainsi, la mesure de U_{ε_1} serait inféri eureà r^k, ce qui est absurde.

Je tiens enfin à faire quelques remarques nécessaires à l'intelligence de notre théorème.

Partons d'un point z_0 de module r_0, et supposons que l'égalité (16) soit satisfaite en ce point avec des branches déterminées des fonctions $a_i(z)$ et $H_i(z) - H_1(z)$. Si l'on fait décrire au point z un chemin $z_0 z'$ ne contenant aucun des points critiques des fonctions $a_i(z)$ et $H_i(z) - H_1(z)$, il n'y aura aucune ambiguïté pour les déterminations de ces fonctions qui satisfont en chaque point du chemin C à l'égalité (16).

Or, je puis choisir le chemin C de façon que l'on arrive au point z'

avec telle détermination que l'on voudra pour une des fonctions $H_i(z) - H_1(z)$.

Ainsi, l'identité (16) étant satisfaite, si l'on se donne un point z' et une détermination quelconque d'une fonction figurant dans (16), il y a toujours des déterminations convenables des autres fonctions telles que l'égalité (16) soit satisfaite au point z'.

Ainsi, par exemple, pour démontrer que la fonction

$$\frac{a_i(z)}{a_1(z)} e^{H_i(z)-H_1(z)}$$

ne saurait être une constante, nous pouvons considérer parmi les déterminations de $H_i(z) - H_1(z)$ celle qui a le plus grand module maximum, et nous savons bien que ce module maximum sera supérieur à $e^{r^{\rho-\varepsilon}}$ sur des arcs dont la longueur totale dépasse une puissance finie de r (¹).

Convenons d'appeler *module maximum* d'une fonction algébroïde $a(z)$ pour $|z| = r$ *le plus grand des modules maximum de ses diverses déterminations.*

CHAPITRE II.

APPLICATIONS.

8. Considérons maintenant une transcendante algébroïde $a(z)$ à un nombre quelconque de branches et d'ordre quelconque, et suppo-

---

(¹) Par contre, la longueur totale des arcs du cercle de rayon r, dont les points ne satisfont pas à l'inégalité

$$\left|\frac{a_i(z)}{a_1(z)}\right| > e^{-r^{\rho_1-\varepsilon}},$$

tend vers zéro avec $\frac{1}{r}$ comme $e^{-r^{\alpha}}$, α étant un nombre quelconque inférieur à ε. Le nombre ρ_1 désigne le plus grand des ordres des $a_i(z)$ et $a_1(z)$. On ferait des développements analogues dans le cas où les $a_i(z)$ et $H_i(z) - H_1(z)$ désignent des algébroïdes d'ordre infini.

sons qu'il y ait un nombre a tel que la fonction $\mathrm{a}(z) - a$ n'admette qu'un nombre fini de zéros; nous supposons, de plus, que la fonction $\mathrm{a}(z)$ n'admette qu'un nombre fini de pôles. Dans nos travaux antérieurs, nous avons appelé *exceptionnel* un tel nombre, et nous avons démontré qu'il est impossible d'en avoir plus de 2ν, où ν désigne le nombre des branches de la transcendante algébroïde.

Soient $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\tau$ les affixes des zéros de $\mathrm{a}(z) - a$ avec un ordre de multiplicité respectivement égal à $m_1, m_2, \ldots, m_\nu$, et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\sigma$ les affixes des pôles de la même fonction avec un ordre de multiplicité respectivement égal à $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\sigma$, et considérons la fonction algébrique $q(z)$

$$q(z) = \frac{(z-\mu_1)^{m_1}(z-\mu_2)^{m_2}\ldots(z-\mu_\tau)^{m_\tau}}{(z-\alpha_1)^{\lambda_1}(z-\alpha_2)^{\lambda_2}\ldots(z-\alpha_\sigma)^{\lambda_\sigma}}. \tag{18}$$

Il est clair que le quotient $\dfrac{\mathrm{a}(z) - a}{q(z)} = \varpi(z)$ n'admettra aucun infini et aucun zéro, et, par conséquent, $\log\varpi(z) = \mathrm{H}(z)$ sera une fonction toujours finie à distance finie. On aura

$$\mathrm{a}(z) - a = q(z)e^{\mathrm{H}(z)}. \tag{19}$$

A priori, la fonction $\mathrm{H}(z)$ peut être à un nombre fini ou infini de branches. Nous allons démontrer que, en général, *cette fonction doit avoir un nombre infini de branches; le cas contraire doit être considéré comme exceptionnel.*

Nous allons, en effet, démontrer qu'*il n'y a pas deux nombres exceptionnels a_1 et a_2 pour lesquels la fonction correspondante $\mathrm{H}(z)$ soit à un nombre fini de branches* (algébroïde).

Supposons qu'il y ait deux tels nombres a_1 et a_2; on aura

$$\mathrm{a}(z) - a_1 = q_1(z)e^{\mathrm{H}_1(z)}, \qquad \mathrm{a}(z) - a_2 = q_2(z)e^{\mathrm{H}_2(z)}, \tag{20}$$

$q_1(z)$ et $q_2(z)$ étant des fonctions algébriques, $\mathrm{H}_1(z)$ et $\mathrm{H}_2(z)$ des fonctions algébroïdes toujours finies à distance finie. L'élimination de $\mathrm{a}(z)$ entre les identités (20) nous conduirait à l'identité

$$\alpha_2 - \alpha_1 = q_1(z)e^{\mathrm{H}_1(z)} - q_2(z)e^{\mathrm{H}_2(z)}. \tag{21}$$

Or, cette identité est de la forme de celles que nous avons considérées dans le Chapitre précédent, remplissant les conditions exigées par le théorème que nous avons établi pour les identités (16). Elle appartient au cas particulier où les fonctions $a_i(z)$ figurant dans les identités (16) sont algébriques.

Dans le cas où la différence $H_1(z) - H_2(z)$ est une constante, il y aura une réduction dans le second membre de (21), mais le terme algébrique restera toujours égal à $a_2 - a_1$.

En appliquant donc le théorème du n° 7, nous conclurons que l'identité (21) est impossible si $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

Appelons donc *doublement exceptionnel* un nombre a exceptionnel tel que la fonction $H(z)$ qui lui correspond par la formule (19) soit à un nombre fini de branches (algébroïde).

Nous avons obtenu le théorème suivant :

Il est impossible d'avoir deux nombres doublement exceptionnels finis [1].

Nous voyons donc que, par rapport aux nombres doublement exceptionnels, les fonctions algébroïdes ne se distinguent pas du tout des transcendantes entières. Le cas de cette exception est encore *unique, quel que soit le nombre des branches,* qui ne joue aucun rôle ici [2].

Si la fonction algébroïde $a(z)$ est d'ordre fini, les exposants que nous avons rencontrés ci-dessus croîtront comme une puissance finie de r, et, par conséquent, seront des fonctions algébriques.

9. Notre théorème est susceptible de se généraliser comme il suit :

Supposons, pour fixer les idées, que la fonction $a(z)$ soit d'ordre fini ρ et considérons un nombre a; si la fonction $a(z) - a$ admet une

---

(1) Tandis que le nombre des valeurs *simplement exceptionnelles* peut atteindre 2ν, ν étant le nombre des branches. (*Voir* mes travaux cités dans la Préface.)

(2) Il est facile de démontrer que la dérivée de l'exposant $H(z)$ est toujours une fonction algébroïde, même dans le cas général où $H(z)$ a un nombre *infini* de branches. Dans un travail prochain, j'exposerai d'autres résultats intéressants se rattachant à cette remarque.

infinité de zéros $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ avec un ordre de multiplicité respectivement égal à $m_1, m_2, m_3, \ldots$ et une infinité de pôles $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ avec un ordre de multiplicité respectivement égal à $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$; formons une autre fonction algébroïde $\varphi(z)$ admettant les mêmes zéros et les mêmes infinis avec le même ordre de multiplicité; alors le quotient $\frac{\mathrm{a}(z)-a}{\varphi(z)}$ sera dépourvu de zéros et d'infinis à distance finie et l'on pourra poser

$$(22) \qquad \frac{\mathrm{a}(z)-a}{\varphi(z)} = e^{\mathrm{H}(z)} \qquad \text{ou bien} \qquad \mathrm{a}(z)-a = \varphi(z)e^{\mathrm{H}(z)}.$$

Si l'algébroïde $\varphi(z)$ est d'ordre ρ_1 inférieur à ρ, l'exposant $\mathrm{H}(z)$ *sera, en général, à une infinité de branches. Si, $\varphi(z)$ étant d'ordre inférieur à ρ,* $\mathrm{H}(z)$ *est une fonction algébroïde, cette valeur doit être considérée comme exceptionnelle, grâce au théorème suivant :*

Théorème. — *Il n'y a pas deux nombres a tels que, $\varphi(z)$ étant d'ordre inférieur à ρ, l'exposant* $\mathrm{H}(z)$ *soit algébroïde.*

Supposons, en effet, qu'il y ait deux nombres a_1 et a_2 tels que

$$(23) \qquad \begin{cases} \mathrm{a}(z)-a_1 = \varphi_1(z)e^{\mathrm{H}_1(z)}, \\ \mathrm{a}(z)-a_2 = \varphi_2(z)e^{\mathrm{H}_2(z)}, \end{cases}$$

$\varphi_1(z)$ et $\varphi_2(z)$ étant des algébroïdes d'ordre inférieur à ρ, et les exposants $\mathrm{H}_1(z)$ et $\mathrm{H}_2(z)$ des *algébroïdes* toujours finies à distance finie; il en résulterait

$$(23') \qquad a_2 - a_1 = \varphi_1(z)e^{\mathrm{H}_1(z)} - \varphi_2(z)e^{\mathrm{H}_2(z)},$$

et cette identité est essentiellement impossible, d'après le théorème général du n° 7. Nous appliquons ici le cas particulier de ce théorème où, dans les identités (10), les coefficients $\mathrm{a}_i(z)$ et les exposants $\mathrm{H}_i(z)$ désignent des algébroïdes d'ordre fini.

Nous avons aussi d'autres extensions de ces considérations aisées à comprendre, j'en laisse le soin au lecteur. On y sera conduit à l'aide du théorème du n° 7, pris dans toute sa généralité.

10. *Les intégrales algébroïdes des équations différentielles du premier ordre.* — Étant donnée une équation différentielle de la forme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} = f(x,y), \tag{24}$$

et deux intégrales quelconques distinctes y_1 et y_2, nous savons que la différence $y_1 - y_2$ est une fonction qui ne peut s'annuler que pour les points singuliers de l'équation différentielle, c'est-à-dire les points qui satisfont à l'équation obtenue par l'élimination de y entre les équations [1]

$$P(x,y) = 0, \qquad Q(x,y) = 0.$$

En effet, d'après le théorème fondamental de Cauchy, si le point $x = \alpha$ n'est pas singulier pour l'équation (24), il n'y a qu'une intégrale qui, pour $x = \alpha$, prend une valeur donnée.

Cela posé, considérons quatre intégrales distinctes y_1, y_2, y_3, y_4 et leur rapport anharmonique

$$R(x) = \frac{(y_1 - y_3)(y_2 - y_4)}{(y_2 - y_3)(y_1 - y_4)}. \tag{25}$$

Si les $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont des polynomes par rapport à x et y, la fonction $R(x)$ n'admettra qu'un nombre *fini* de zéros et d'infinis; en effet, les zéros du numérateur et les zéros du dénominateur de la fraction (25) sont en nombre fini, puisqu'il en est ainsi des points singuliers de l'équation différentielle; d'autre part, les infinis d'une intégrale y_1, par exemple, sont des points ordinaires de $R(x)$, parce que les deux termes de la fraction (25) s'y comportent de la même façon, grâce à la conformation caractéristique du rapport anharmonique.

Si les intégrales y_1, y_2, y_3, y_4 sont algébroïdes, il en est de même

---

[1] Aussi pour les points singuliers de l'équation différentielle (24)' que l'on déduit de (24) par la transformation $y = \frac{1}{Y}$.

Nous pouvons toujours, par une transformation homographique convenable, supposer que le degré de P par rapport à y surpasse de deux unités le degré de Q par rapport à la même lettre. Ainsi la valeur $y = \infty$ ne sera pas singulière pour l'équation différentielle.

de $R(x)$ et cette fonction sera *exceptionnelle*, c'est-à-dire les nombres 0 et ∞ sont exceptionnels pour elle. J'établirai d'abord le théorème suivant :

Il est impossible que tous les rapports anharmoniques de ces quatre intégrales soient des fonctions doublement exceptionnelles.

La démonstration sera faite à l'aide de notre théorème du n° **7**.

Supposons, en effet, que $R(x)$ soit doublement exceptionnelle; alors elle peut se mettre sous la forme

$$R(x) = q(x)e^{H(x)}, \tag{26}$$

$q(x)$ désignant une fonction algébrique et $H(x)$ une fonction *algébroïde* finie à distance finie.

Or, nous savons qu'il y a un autre rapport anharmonique $R_1(x)$ qui satisfait à la relation

$$R(x) + R_1(x) = 1.$$

Cette identité montre, d'après notre théorème général du n° **7**, que $R_1(x)$ ne saurait être aussi de la forme (26), c'est-à-dire *doublement exceptionnelle*. Si nous posons donc

$$R_1(x) = q_1(x)e^{H_1(x)}, \tag{27}$$

$q_1(x)$ étant une fonction algébrique admettant les mêmes zéros et les mêmes infinis avec le même ordre de multiplicité que $R_1(x)$, l'exposant $H_1(x)$ sera une fonction à un nombre *infini* de branches. Notre théorème est donc démontré.

11. Nous pouvons donc supposer que $R(x)$ ne soit pas doublement exceptionnelle; la dérivation nous donne

$$\left\{\begin{aligned} &R'(x) = [q'(x) + q(x)H'(x)]e^{H(x)}, \\ &\frac{R'(x)}{R(x)} = \frac{q'(x)}{q(x)} + H'(x) = \varphi(x). \end{aligned}\right. \tag{28}$$

D'autre part, la dérivation de l'équation (25) nous conduit à une équation de la forme

$$R'(x) = \sigma(y_1, y_2, y_3, y_4, y'_1, y'_2, y'_3, y'_4)$$

ou bien

$$(29)\quad \begin{cases} R(x)\varphi(x) \\ \quad = \sigma[y_1, y_2, y_3, y_4), f(x, y_1), f(x, y_2), f(x, y_3), f(x, y_4)], \end{cases}$$

grâce à l'équation (28) et aux équations

$$y'_1 = f(x, y_1), \quad y'_2 = f(x, y_2), \quad y'_3 = f(x, y_3), \quad y'_4 = f(x, y_4).$$

Enfin, si l'on remplace dans (29) $R(x)$ par sa valeur

$$\frac{(y_1 - y_3)(y_2 - y_4)}{(y_2 - y_3)(y_1 - y_4)},$$

nous obtenons l'équation suivante

$$(30)\quad \begin{cases} \varphi(x)\dfrac{(y_1 - y_3)(y_2 - y_4)}{(y_2 - y_3)(y_1 - y_4)} \\ \quad = \sigma[y_1, y_2, y_3, y_4, f(x, y_1), f(x, y_2), f(x, y_3), f(x, y_4)], \end{cases}$$

dont le second membre est une fonction algébrique des y_1, y_2, y_3, y_4 et x. Les quatre intégrales y_1, y_2, y_3 et y_4 étant supposées algébroïdes, l'équation (30) montre qu'il en est de même de $\varphi(x)$, puisque l'expression $\frac{(y_1 - y_3)(y_2 - y_4)}{(y_2 - y_3)(y_1 - y_4)}$ n'est pas identiquement nulle.

Dès lors, la dérivée $H'(x)$ sera aussi *algébroïde*, en vertu de l'équation (28).

Nous en déduisons donc le théorème suivant :

Théorème. — *Si une équation différentielle de la forme* (24) *admet quatre intégrales algébroïdes distinctes* y_1, y_2, y_3, y_4, *tout rapport anharmonique* $R(x)$ *de ces intégrales peut se mettre sous la forme*

$$R(x) = q(x)e^{H(x)},$$

$q(x)$ désignant une fonction algébrique et $H(x)$ une fonction dont la dérivée $H'(x)$ est toujours algébroïde, c'est-à-dire à un nombre fini de branches. La fonction $H(x)$ est encore toujours finie à distance finie (¹).

Ce théorème remarquable complète, pour ainsi dire, le théorème établi par M. Petrovitch sur le nombre des trancendantes uniformes satisfaisant à une équation du premier ordre et du premier degré (*Thèse de doctorat*, 1894, Paris, Gauthier-Villars et *Traité d'Analyse* de M. Picard, t. III, p. 356).

Nous voyons que le rapport anharmonique de quatre intégrales algébroïdes distinctes ou bien est une fonction doublement exceptionnelle, ou bien il jouit de propriétés voisines de celles des fonctions doublement exceptionnelles.

Il sera peut-être possible d'aller plus loin, mais, dans ce travail, je m'arrête ici.

Au moment de la correction des épreuves, j'ajoute que l'identité (30) nous conduit à une précision intéressante de ces résultats dans le cas où les algébroïdes y_1, y_2, y_3, y_4 sont d'ordre fini :

Si le rapport anharmonique $R(x)$ était une fonction doublement exceptionnelle, l'exposant $H(x)$ serait une fonction algébrique et il en serait de même de sa dérivée $H'(x)$; dès lors, l'identité (30) fournirait une relation algébrique entre les intégrales y_1, y_2, y_3, y_4 à coefficients algébriques.

Nous en déduisons le théorème suivant :

Théorème. — *Si y_1, y_2, y_3, y_4 désignent des intégrales algébroïdes d'ordre fini et algébriquement distinctes, aucun rapport anharmonique de ces quatre intégrales ne saurait être une fonction doublement exceptionnelle.*

Dans un autre travail, j'exposerai des généralisations remarquables de ce résultat.

(¹) Comme nous avons indiqué plus haut, cette propriété de la dérivée $H'(x)$ est générale pour toutes les fonctions algébroïdes $a(z)$.

APPENDICE.

Je me crois obligé d'exposer ici la démonstration d'un lemme, dont je me suis servi dans le n° 5, à savoir :

Étant donnée une fonction entière $F(z)$ *d'ordre* ρ; *les points de la circonférence de rayon* r, *qui satisfont à l'inégalité*

(31) $$|F(z)| > e^{r^{\rho-\varepsilon}},$$

remplissent des arcs de longueur supérieure à une puissance finie de r.

Soient, en effet, deux points z_r et $z_r + \Delta z_r$ de cette circonférence tels que

$$|F(z_r)| = e^{r^{\rho-\varepsilon}}, \qquad |F(z_r+\Delta z_r)| = e^{r^{\rho-\delta}} \qquad (\delta < \varepsilon),$$

avec l'hypothèse que le module de $F(z)$ croît continuellement depuis le point z_r jusqu'au point $z_r + \Delta z_r$.

Nous avons

(32) $$|F(z_r+\Delta z_r) - F(z_r)| > e^{r^{\rho-\delta}} - e^{r^{\rho-\varepsilon}} > e^{r^{\rho-\delta}}(1-\alpha),$$

α étant un nombre positif, aussi petit que l'on voudra.

D'autre part, on a

(33) $$F(z_r+\Delta z_r) - F(z_r) = \int_T F'(z)\,dz,$$

l'intégration étant faite sur l'arc T, ayant comme extrémités les points z_r et $z_r + \Delta z_r$, dont tous les points satisfont aux inégalités

$$e^{r^{\rho-\varepsilon}} \leq |F(z)| \leq e^{r^{\rho-\delta}}.$$

Nous utiliserons ici les résultats récents de M. Boutroux (voir : *Sur quelques propriétés des fonctions entières*, thèse de Doctorat, 1903).

Sur la croissance de la dérivée logarithmique d'une fonction entière, M. Boutroux a démontré que, si l'on exclut du champ de la variable z certaines aires fermées entourant les pôles, la dérivée logarithmique d'une fonction entière d'ordre fini reste comparable, partout ailleurs, à une puissance finie de z.

On sait que ce théorème sert de complément précieux aux résultats bien connus de M. Borel sur la croissance de la dérivée. Les points z_r que nous avons en vue ici se trouvent dans les régions du module maximum de $H(z)$ et, par suite, se trouvent en dehors des aires exclues par M. Boutroux. Son théorème est donc applicable pour ces points et nous y avons

$$|H'(z)| < |H(z)|\, r^k < e^{r^{\rho-\delta}} r^k \qquad \text{pour} \qquad |z| = r,$$

car on a

$$|H(z)| \leq e^{r^{\rho-\delta}} \qquad \text{sur l'arc T.}$$

Dès lors, la formule (33) nous conduit à l'inégalité

$$|F(z_r + \Delta z_r) - F(z_r)| < \int_l e^{r^{\rho-\delta}} r^k\, ds = e^{r^{\rho-\delta}} r^k \int_l ds = r^k e^{r^{\rho-\delta}} l_r.$$

Nous avons donc l'inégalité

$$(34) \qquad |F(z_r + \Delta z_r) - F(z_r)| < r^k e^{r^{\rho-\delta}} l_r.$$

La comparaison de cette inégalité avec (32) nous conduit à l'inégalité

$$r^k e^{r^{\rho-\delta}} l_r > (1-\alpha) e^{r^{\rho-\delta}}$$

ou bien

$$l_r > (1-\alpha) r^{-k}.$$

Cette inégalité prouve notre théorème, puisque α est aussi petit que l'on voudra, pourvu que r soit assez grand.

Nous voyons donc que la longueur l_r de l'arc T, même lorsqu'elle tend vers zéro avec $\frac{1}{r}$, reste, à partir d'une certaine valeur de r, supérieure à une certaine puissance finie de r.

Notre théorème est donc démontré.

Sur les actions exercées par un fluide parfait incompressible sur ses parois;

PAR M. G. COMBEBIAC.

I. — Aperçu historique.

Le mouvement d'une masse parfaitement fluide et incompressible, qui occupe un volume fini ou infini et dans lequel baignent des corps solides, rigides ou déformables, est déterminé par le mouvement des parois, lorsque la masse fluide s'est trouvée initialement au repos; mais il n'en résulte pas que les positions des diverses particules de la masse fluide soient déterminées par les positions des parois. En particulier, si les positions de ces parois peuvent être déterminées par les valeurs de paramètres indépendants en nombre fini, ces paramètres ne jouent pas le même rôle vis-à-vis du fluide; celui-ci constitue, par rapport à ces paramètres, un système *anholonome*, et l'on sait que les équations de Lagrange ne sont pas, en général, applicables à un tel système. Ces équations sont toutefois applicables, par suite de circonstances spéciales, au cas qui vient d'être défini, et elles permettent alors de déterminer les actions exercées par la masse fluide sur les parois qui la limitent. C'est ce qui résulte de la démonstration insérée par Thomson et Tait dans l'édition allemande [1] de leur

[1] THOMSON u. TAIT, *Handbuch der theoretischen Physik. Deutsche Uebersetzung*. Bd. I, S. 292-296 (*Braunschweig*, 1871-1874).

ouvrage *Natural Philosophy* à la suite des objections formulées par Boltzmann (*Crelle's Journal*, Bd. 73) contre l'emploi qui avait été fait *de plano* des équations de Lagrange dans la première édition de l'ouvrage.

Le dispositif adopté par Thomson et Tait, basé d'ailleurs sur une remarque de Boltzmann, consiste essentiellement dans la démonstration de la validité, pour le cas visé, du principe d'Hamilton, d'où peuvent être déduites les équations de Lagrange. Cette démonstration fut reprise par Kirchhoff dans ses *Vorlesungen* [1].

Cette application du principe d'Hamilton et des équations de Lagrange au mouvement d'un fluide incompressible suppose expressément que ce fluide part du repos, c'est-à-dire que le mouvement est *irrotationnel* et *acyclique*. Elle ne serait pas légitime, en particulier, dans le cas d'un fluide qui occuperait un volume à connexion multiple limité par des parois fixes et serait animé d'un mouvement, même irrotationnel. Kirchhoff [2] traita directement le cas où le fluide occupe tout l'espace extérieur à deux anneaux infiniment déliés, rigides et fixes et détermina ainsi les actions qui s'exercent entre les deux anneaux ; ces actions sont soumises à une loi analogue à celle qui régit les forces électrodynamiques, mais elles sont de sens contraire à celles-ci.

Enfin Carl Neumann [3] établit la formule générale des actions exercées par un fluide parfait incompressible sur ses parois dans le cas où le fluide est animé d'un mouvement irrotationnel, cyclique ou acyclique.

L'objet de ce mémoire est d'établir la formule générale exprimant les actions exercées par un fluide parfait incompressible sur les parois dans le cas où le fluide est animé d'un mouvement quelconque (continu), cyclique ou acyclique, rotationnel ou irrotationnel. Cette formule devra nécessairement comprendre celle de Carl Neumann.

Contrairement aux auteurs qui ont jusqu'à présent traité cette

---

[1] KIRCHHOFF, *Vorlesungen ueber Mechanik*, 4e Auflage, S. 233-250, Leipzig.

[2] KIRCHHOFF, *Crelle's Journal*, Bd 71, S. 273.

[3] CARL NEUMANN, *Hydrodynamische Untersuchungen*, Leipzig, 1883. *Beiträge zu einzelnen Theilen der mathematischen Physik*, Leipzig, 1893.

question, nous avons écarté toute intervention du principe d'Hamilton, qui présente l'inconvénient de masquer un peu les circonstances qui constituent, en réalité, la base de la démonstration. L'expression à obtenir a donc été directement rattachée aux principes mêmes de la Dynamique en suivant la marche généralement adoptée pour établir les équations de Lagrange.

Enfin, nous tenons à signaler que la résolution du problème posé a été poursuivie exclusivement en employant l'analyse quaternionienne et qu'il n'est pas douteux que c'est grâce aux simplifications qu'elle comporte que la généralisation des résultats obtenus par Carl Neumann s'est présentée comme une application sans difficulté des principes de la Mécanique. De fait, elle n'a été qu'une circonstance dans la rédaction, entreprise pour notre usage personnel, d'un résumé d'Hydrodynamique en quaternions. Dans le présent Mémoire, les formules quaternioniennes primitives ont été traduites dans la notation ordinaire, sous réserve de quelques simplifications d'écriture, que le lecteur voudra bien nous accorder.

II. — Notations et formules générales.

La question traitée exige le maniement d'un assez grand nombre de vecteurs. Afin d'éviter l'introduction des trois composantes qui déterminent chaque vecteur et d'alléger dans une mesure très notable l'analyse, qui deviendrait sans cela très pénible à suivre, un vecteur sera représenté par une seule lettre, non seulement dans le discours, mais encore dans les formules analytiques et dans les opérations mêmes du calcul; il suffit à cet effet d'adopter quelques conventions tellement simples et naturelles qu'il est à peine besoin de les énoncer explicitement.

Tout d'abord, le signe de l'addition numérique sera également employé pour exprimer l'addition vectorielle, qui est d'un usage courant et qui jouit des mêmes propriétés formelles.

Les relations géométriques qui interviennent dans les formules sont en nombre très restreint. De fait il suffit, pour les exprimer, d'introduire deux notations spéciales pour représenter les deux fonctions

élémentaires auxquelles donnent lieu deux vecteurs; on y adjoindra une troisième notation s'appliquant à une fonction de trois vecteurs. F, F' et F'' désignant trois vecteurs ayant respectivement pour composantes suivant les axes de coordonnées X, Y, Z; X', Y', Z'; X'', Y'', Z''; l'on posera

$$(1)\quad \begin{cases} |\mathrm{FF'}| = \mathrm{XX'} + \mathrm{YY'} + \mathrm{ZZ'}, \\ \mathfrak{V}(\mathrm{FF'}) = (\mathrm{YZ'} - \mathrm{ZY'},\ \mathrm{ZX'} - \mathrm{XZ'},\ \mathrm{XY'} - \mathrm{YX'}), \\ |\mathrm{FF'F''}| = |\mathrm{F}\mathfrak{V}(\mathrm{F'F''})| = |\mathfrak{V}(\mathrm{FF'})\mathrm{F''}| = \begin{vmatrix} \mathrm{X} & \mathrm{Y} & \mathrm{Z} \\ \mathrm{X'} & \mathrm{Y'} & \mathrm{Z'} \\ \mathrm{X''} & \mathrm{Y''} & \mathrm{Z''} \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Il reste à réaliser une adaptation des notations du calcul infinitésimal au maniement direct des quantités complexes ainsi considérées. La définition de la différentielle d'un vecteur résulte évidemment de celle de l'addition, et il est inutile d'y insister. F étant un vecteur fonction d'une variable numérique q, on posera donc

$$(2)\qquad \frac{d\mathrm{F}}{dq} = \left(\frac{d\mathrm{X}}{dq}, \frac{d\mathrm{Y}}{dq}, \frac{d\mathrm{Z}}{dq}\right).$$

Les notations usitées pour les dérivées partielles sont, elles aussi, directement applicables.

Il convient également de prévoir le cas où la variable indépendante est un vecteur ou encore un point μ de coordonnées x, y, z. La différentielle d'une fonction quelconque de μ, numérique ou vectorielle, s'exprime alors en fonction des dérivées partielles de cette fonction et des accroissements dx, dy et dz qui déterminent le vecteur $d\mu$. Nous poserons, pour éviter l'introduction explicite des coordonnées x, y et z :

$$(3)\qquad d\mathrm{F} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}dx + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}dy + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}dz = \frac{d\mathrm{F}}{d\mu}(d\mu),$$

où $\frac{d\mathrm{F}}{d\mu}(d\mu)$ est une fonction linéaire homogène de dx, dy et dz. L'expression $\frac{d\mathrm{F}}{d\mu}$, qui constitue une généralisation de la notation ordi-

naire des dérivées, représente une *opération linéaire homogène*. Cette notation se prête élégamment à tous les besoins du calcul infinitésimal; mais elle ne sera employée ici qu'à titre de simplification d'écriture, et il est inutile, par suite, d'en développer les propriétés.

Un vecteur F fonction de point donne lieu à deux fonctions différentielles, qui interviennent constamment dans l'étude des champs vectoriels. Il importe d'attribuer à ces deux fonctions des symboles simples. On posera donc

$$(4)\qquad \begin{cases} \nabla_1 F = \dfrac{\partial X}{\partial x} + \dfrac{\partial Y}{\partial y} + \dfrac{\partial Z}{\partial z}, \\ \nabla_2 F = \left(\dfrac{\partial Z}{\partial y} - \dfrac{\partial Y}{\partial z}, \dfrac{\partial X}{\partial z} - \dfrac{\partial Z}{\partial x}, \dfrac{\partial Y}{\partial x} - \dfrac{\partial X}{\partial y}\right). \end{cases}$$

Enfin, U étant une fonction numérique de point, on désignera par ∇U le vecteur qui l'admet à titre de fonction potentielle, c'est-à-dire que l'on posera

$$(5)\qquad \nabla U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right).$$

Les notations introduites par les formules (1), (2), (3), (4) et (5) suffisent à permettre toute application de l'Analyse mathématique aux vecteurs sans qu'il soit nécessaire de les représenter par leurs trois composantes.

On rappelle que $\nabla_1 F$ s'appelle *la divergence du champ vectoriel* déterminé par F. Un champ dont la divergence est nulle en tout point est dit *solénoïdal*. C'est le cas du champ déterminé par la vitesse d'un fluide incompressible.

Le vecteur $\frac{1}{2}\nabla_2 F$ sera appelé la *rotation élémentaire* du champ. Un champ dont la rotation élémentaire est nulle est dit *irrotationnel*. C'est, comme on sait, la condition nécessaire et suffisante pour que le vecteur du champ admette une fonction potentielle.

La rotation élémentaire a une distribution solénoïdale; par suite, si l'on considère un tube infiniment délié ayant ses génératrices tangentes en chacun de leurs points à la direction de la rotation élémentaire en ce point, le produit de la section du tube par la grandeur de la rotation élémentaire sera constant tout le long du tube. Ce produit définit l'*intensité tourbillonnaire* du tube. L'espace occupé par un

champ sera supposé divisé en tubes de cette sorte se fermant sur eux-mêmes ou se terminant aux surfaces limites : ce sont les *filets tourbillonnaires* du champ.

On appelle *circulation* le long d'une ligne fermée L la valeur de l'intégrale

$$\int_L F_l \, dl,$$

où dl désigne un élément linéaire de la ligne L et F_l la composante du vecteur F suivant la direction de cet élément. Dans un champ irrotationnel, cette intégrale est nulle pour toute ligne fermée susceptible de se réduire à un point par déformation continue sans sortir du champ. C'est ce qui est réalisé pour toute ligne fermée lorsque le champ occupe un volume à simple connexion et, par suite, que le champ admet une fonction potentielle uniforme. Lorsque le volume occupé par le champ est à connexion multiple, la valeur de la circulation est la même pour toutes les lignes fermées susceptibles de se réduire les unes aux autres par déformation continue sans sortir du champ. Il suffit donc d'envisager les valeurs de la circulation qui sont relatives à certaines lignes fermées convenablement choisies en nombre égal au degré de connexion du volume occupé par le champ. Ces valeurs seront appelées les *modules de circulation* du champ. Lorsqu'elles sont nulles, le champ est dit *acyclique*.

Dans un champ rotationnel, la valeur de la circulation dépend de la rotation élémentaire. Mais, si l'on retranche de cette valeur la partie due à la rotation élémentaire, on obtient une quantité qui jouit des mêmes propriétés que les modules de circulation dans les champs irrotationnels. On peut donc étendre cette notion aux champs rotationnels.

Moyennant les diverses définitions ci-dessus rappelées, l'on peut énoncer la proposition suivante :

Un champ vectoriel ayant des dérivées premières déterminées et continues en tout point est déterminé d'une manière univoque par les données suivantes :

1° *Valeur de la composante normale en tout point des surfaces limites;*

2° *Vecteur représentant la rotation élémentaire en tout point;*

3° *Valeurs des modules de circulation.*

Cette proposition s'applique aussi aux champs vectoriels s'étendant à l'infini moyennant certaines conditions que nous supposerons réalisées dans les champs que nous aurons à considérer.

Il nous reste à donner, sous la forme correspondante aux notations adoptées, les formules générales auxquelles il sera fait appel dans cette étude.

Étant donné un champ vectoriel occupant un volume V limité par des surfaces dont l'ensemble sera désigné par S, on désignera par $\delta\tau$ un élément de ce volume, par $\delta\sigma$ l'aire d'un élément superficiel de S, par ν le vecteur de longueur égale à l'unité dirigé suivant la normale à cet élément superficiel vers l'extérieur du champ. La composante normale du vecteur du champ en un point de S a évidemment pour expression, suivant notre notation, $[\nu F]$; elle sera souvent aussi désignée par F_n.

Le théorème dit *de Gauss* sera dès lors exprimé par la formule suivante :

$$\int_V \nabla_1 F\,\delta\tau = \int_S [\nu F]\,\delta\sigma = \int_S F_n\,\delta\sigma. \tag{6}$$

Cette formule est également applicable aux champs s'étendant à l'infini moyennant l'adjonction au système de surfaces S d'une sphère de centre déterminé et de rayon croissant indéfiniment. Pour les champs que nous aurons à considérer, l'intégrale relative à cette sphère aura une valeur nulle et il n'en sera pas question.

On emploiera, en plus de la formule (6), trois autres formules, dont la démonstration consiste uniquement en développements de calcul (ces développements s'effectuent avec une extrême simplicité en quaternions). Ces formules sont les suivantes :

$$\nabla_1(UF) = U\nabla_1 F + [F\nabla U] \qquad \text{(U, fonction numérique)}, \tag{7}$$

$$\nabla[FF'] = \frac{dF}{d\mu}(F') + \frac{dF'}{d\mu}(F) + \mathfrak{V}(F\nabla_2 F') + \mathfrak{V}(F'\nabla_2 F), \tag{8}$$

$$\nabla_1 \mathfrak{V}(FF') = [F'\nabla_2 F] - [F\nabla_2 F'], \tag{9}$$

$$\nabla_2 \mathfrak{V}(FF') = \frac{dF}{d\mu}(F') - \frac{dF'}{d\mu}(F) + F\nabla_1 F' - F'\nabla_1 F. \tag{10}$$

III. — Propriétés cinématiques.

On considère un fluide parfait (sans viscosité) incompressible, dans lequel peuvent baigner des corps mobiles et qui occupe un espace limité par des parois mobiles ou s'étendant à l'infini, mais dans ce dernier cas avec la condition que le fluide est *au repos à l'infini*. Le fluide est soumis à des forces extérieures qui s'exercent sur les éléments de volume et qui admettent une fonction potentielle.

Le mouvement d'un tel fluide réalise les conditions suivantes :

1° Toute particule du fluide qui se trouve, à un instant déterminé, en contact avec les parois conserve cette propriété, ce qui s'exprime analytiquement par l'égalité à tout instant des composantes normales aux parois des vitesses de la particule du fluide et de la particule de la paroi;

2° L'accélération aux divers points du fluide admet une fonction potentielle, propriété qui se traduit par les suivantes (propriétés d'Helmholtz) : les modules de circulation relatifs à la vitesse du fluide restent constants; un filet tourbillonnaire reste constitué par les mêmes particules (par suite possède une individualité matérielle) et conserve en outre la même intensité.

Le mouvement du fluide est dès lors déterminé par les données suivantes :

Mouvement des parois;

Valeurs des modules de circulation à un instant déterminé;

Rotation élémentaire aux divers points du fluide à un instant déterminé.

Le mouvement des parois déterminera à tout instant les composantes normales de la vitesse du fluide; les valeurs de ces composantes et des modules de circulation complétées par la rotation élémentaire permettront, d'après la proposition rappelée dans le paragraphe précédent, de déterminer le champ de la vitesse à un instant déterminé. On pourra dès lors déterminer la position des filets tourbillonnaires à l'instant suivant, et, par suite, les modules de circulation restant d'ailleurs constants, on aura pour cet instant des données de même nature que pour l'instant initial. Le mouvement du fluide est donc bien déterminé.

Supposons que la position des parois qui limitent le fluide soit déterminée par les valeurs de r paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_r$, de façon que les parois laissent toujours au fluide le même volume. Dans ces conditions, la présence du fluide n'impose aucune condition aux paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_r$. Soit $q'_1, q'_2, \ldots, q'_r$ les dérivées des paramètres par rapport au temps t.

L'on sait que la vitesse v en tout point du fluide peut être décomposée en deux autres, qui se déterminent séparément, savoir : une composante v_0 déterminée en fonction de la distribution de la rotation élémentaire, des modules de circulation et de la position des parois, c'est-à-dire des paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_r$, et une composante v_1 déterminée en fonction de la position des parois et des composantes normales des vitesses des divers points de ces parois. La grandeur de cette dernière croît proportionnellement à ces composantes normales quand celles-ci sont multipliées par un même nombre; elle s'exprime donc, ainsi que le potentiel dont elle dérive, par une fonction linéaire homogène des dérivées $q'_1, q'_2, \ldots, q'_r$. On posera

$$(1) \qquad v = v_0 + v_1 = \mathrm{A}_0 + \Sigma \mathrm{A}_i q'_i \qquad (\mathrm{A}_i = \nabla \varphi_i),$$

$\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_r$ étant des vecteurs fonctions de point et dérivant de fonctions harmoniques.

Les formules (1) expriment les liaisons du fluide et des parois. On reconnaît facilement que, même dans le cas où le mouvement est irrotationnel et acyclique, c'est-à-dire où v_0 est nul, les positions des particules fluides ne sont pas déterminées en fonction des paramètres. Il faudrait pour cela que l'on ait constamment et en tout point

$$\frac{\partial \mathrm{A}_i}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathrm{A}_i}{\partial \mu}(\mathrm{A}_j) = \frac{\partial \mathrm{A}_j}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathrm{A}_j}{\partial \mu}(\mathrm{A}_i).$$

Ainsi à tout *mouvement* des parois correspond un et un seul mouvement irrotationnel et acyclique du fluide; mais il ne s'ensuit pas que la *position* des parois détermine celle des diverses particules du fluide, autrement dit, que les positions de ces particules soient des fonctions des paramètres q. En général, au contraire, lorsque les parois reviennent occuper une même position après avoir accompli un mouvement, il n'en est pas de même pour les particules fluides. A né

considérer que les mouvements irrotationnels et acycliques du fluide, celui-ci se comporte, vis-à-vis des paramètres q, comme un système *anholonome*.

Un déplacement virtuel des parois déterminé par les accroissements $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_r$ des paramètres est compatible avec une infinité de déplacements virtuels du fluide, parmi lesquels se trouve le déplacement irrotationnel et acyclique

$$\delta \mu = \Sigma A_i \delta q_i. \tag{2}$$

Nous avons à établir un certain nombre de formules, qui seront utilisées dans la suite.

En désignant par ψ le potentiel d'où dérive v_1 et en appliquant les formules II (6) et (7) au vecteur ψv_0, en observant que les composantes de v_0 normales aux parois sont nulles, on a

$$\int_V |v_0 v_1| \delta\tau = \int_S \psi v_{0n} \delta\sigma = 0. \tag{3}$$

La formule (3) résulte uniquement du double fait que v_1 dérive d'un potentiel et que v_0 donne lieu, aux divers points des parois, à des composantes normales nulles. On a donc de même :

$$\int_V |v_0 A_i| \delta\tau = 0 \tag{4}$$

et également

$$\int_V |v_0 A_{iq}| \delta\tau = 0, \tag{5}$$

car le vecteur A_{iq} dérive d'un potentiel, la dérivation par rapport à q étant évidemment commutative avec les opérations de dérivation géométrique.

Si l'on désigne par T la force vive du fluide, on a

$$T = \tfrac{1}{2}\rho \int_V |v_0^2| \delta\tau + \rho \int_V |v_0 v_1| \delta\tau + \tfrac{1}{2}\rho \int_V |v_1^2| \delta\tau,$$

et, en raison de (3),

$$(6)\qquad T = \tfrac{1}{2}\rho\int_V |v_0^2|\,\delta\tau + \tfrac{1}{2}\rho\int_V |v_1^2|\,\delta\tau = T_0 + T_1,$$

en désignant par T_0 la valeur de la force vive due à v_0, c'est-à-dire de celle qui correspond à $v_1 = 0$, et par T_1 la valeur de la force vive due à v_1.

Avant de déterminer de quelle manière varient T_0 et T_1 avec les divers éléments dont ces expressions dépendent, il est nécessaire d'établir une formule générale.

$\psi(q_1, q_2, \ldots, q_r, \mu)$ étant une fonction des paramètres et de μ, l'intégrale $\Psi = \int_V \psi\,\delta\tau$ ne dépend plus de μ et est uniquement fonction des paramètres. L'accroissement $\frac{\partial\Psi}{\partial q_i}\delta q_i$ de Ψ est égal à la somme des accroissements relatifs à tous les éléments fluides, de sorte que l'on a

$$(7)\qquad \frac{\partial\Psi}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i}\int_V \psi\,\delta\tau = \int_V \psi'_{q_i}\,\delta\tau + \int_V \frac{\partial\psi}{\partial\mu}(A_i)\,\delta\tau.$$

Cette formule suppose toutefois que ψ est une fonction uniforme dans tout l'espace occupé par le fluide; dans le cas contraire, il serait nécessaire d'ajouter au second membre un terme relatif à la variation brusque que subirait ψ pour certaines particules du fluide. La formule (7) ne devra donc être appliquée qu'à des fonctions uniformes, numériques ou vectorielles d'ailleurs.

La formule (7) va nous permettre d'exprimer la dérivée de T par rapport au temps. On a

$$(8)\qquad \frac{dT_1}{dt} = \sum \frac{\partial T_1}{\partial q'_i} q''_i + \sum \frac{\partial T_1}{\partial q_i} q'_i.$$

On sait que l'on peut mettre le second membre de cette formule sous une autre forme. On a, en effet,

$$\sum \frac{\partial T_1}{\partial q'_i} q''_i = \frac{d}{dt}\left(\sum \frac{\partial T_1}{\partial q'_i} q'_i\right) - \sum\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_1}{\partial q'_i}\right) q'_i\right],$$

et, en outre, T_1 étant une fonction homogène quadratique des dérivées

$$\sum \frac{\partial T_1}{\partial q'_i} q'_i = 2T_1.$$

De ces deux relations combinées avec (8) résulte

$$\frac{dT_1}{dt} = \sum \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_1}{\partial q'_i} \right) q'_i - \frac{\partial T_1}{\partial q_i} q'_i \right],$$

formule qui, en posant,

$$\text{(9)} \qquad P_{1i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T_1}{\partial q'_i} - \frac{\partial T_1}{\partial q_i},$$

peut évidemment s'écrire

$$\text{(10)} \qquad dT_1 = \Sigma P_{1i} \, dq_i.$$

On a enfin, dans le cas qui nous occupe,

$$\text{(11)} \qquad \frac{\partial T_1}{\partial q} = \frac{\partial T}{\partial q} - \rho \int_V | v_1 A | \delta\tau.$$

Nous allons démontrer la formule

$$\text{(12)} \qquad \frac{\partial T_1}{\partial q} = \rho \int_V | v_1 \Sigma A'_{q_i} q'_i | \delta\tau + \rho \int_V \left[v_1 \frac{\partial A}{\partial q} (v_1) \right] \delta\tau.$$

Cette formule correspond à la propriété qui permet de déduire les équations de Lagrange de l'équation qui exprime les deux principes combinés des vitesses virtuelles et de d'Alembert. Dans le cas actuel, les paramètres q ne sont pas ceux du système dont la force vive T_1 est en jeu. Mais la vitesse v_1 d'un point de ce système a une expression de la même forme que si la position de ce point était effectivement déterminée par les valeurs des paramètres, avec la différence que les coefficients de $q'_1, q'_2, \ldots, q'_r$ ne sont pas les dérivées partielles d'une même fonction de $q_1, q_2, \ldots, q_r$. On sait que cette circonstance caractérise le cas des systèmes *anholonomes* et qu'elle ôte toute validité au fonde-

ment de la transformation de Lagrange. C'est donc sur des circonstances particulières au cas traité que doit être basée la démonstration de la formule (12).

On a, en appliquant la formule (7) à la fonction T_1,

$$\frac{\partial T_1}{\partial q} = \rho \int_V \left[v_1 \frac{\partial v_1}{\partial q} \right] \delta\tau + \rho \int_V \left[v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \mu}(A) \right] \delta\tau$$
$$= \rho \int_V [v_1 \Sigma A'_{iq} q'_i] \delta\tau + \rho \int_V \left[v_1 \sum \frac{\partial A_i}{\partial \mu}(A) q'_i \right] \delta\tau.$$

Il suffit donc de prouver l'égalité

$$\int_V [v_1 A'_{q_i}] \delta\tau + \int_V \left[v_1 \frac{\partial A}{\partial \mu}(A_i) \right] \delta\tau = \int_V [v_1 A_{iq}] \delta\tau + \int_V \left[v_1 \frac{\partial A_i}{\partial \mu}(A) \right] \delta\tau.$$

Les vecteurs A'_{q_i} et A'_{iq} ayant, comme les vecteurs A et A_i dont ils sont les dérivées, une distribution solénoïdale, les formules II (6) et (7) donnent

$$\int_S \psi [\nu A'_{q_i}] \delta\sigma = \int_V [v_1 A'_{q_i}] \delta\tau, \qquad (v_1 = \nabla\psi).$$
$$\int_S \psi [\nu A'_{iq}] \delta\sigma = \int_V [v_1 A'_{iq}] \delta\tau,$$

Le vecteur

$$\frac{\partial A}{\partial \mu}(A_i) - \frac{\partial A_i}{\partial \mu}(A)$$

a également une distribution solénoïdale, car il représente la rotation élémentaire du champ déterminé par le vecteur $\mathfrak{V}(AA_i)$. On a, par suite,

$$\int_S \psi \left[\nu \frac{\partial A}{\partial \mu}(A_i) \right] \delta\tau - \int_S \psi \left[\nu \frac{\partial A_i}{\partial \mu}(A) \right] \delta\tau$$
$$= \int_V \left[v_1 \frac{\partial A}{\partial \mu}(A_i) \right] \delta\tau - \int_V \left[v_1 \frac{\partial A_i}{\partial \mu}(A) \right] \delta\tau.$$

L'égalité à démontrer devient donc

$$\int_S \psi [\nu A'_{q_i}] \delta\sigma + \int_S \psi \left[\nu \frac{\partial A}{\partial \mu}(A_i) \right] \delta\sigma = \int_S \psi [\nu A'_{iq}] \delta\sigma + \int_S \psi \left[\nu \frac{\partial A_i}{\partial \mu}(A) \right] \delta\sigma,$$

et, par suite, il suffit de prouver que l'on a en tout point situé sur la surface des parois

$$|\nu \Lambda'_{q_i}| + \left[\nu \frac{\partial \Lambda}{\partial \mu}(\Lambda_i)\right] = |\nu \Lambda'_{iq}| + \left[\nu \frac{\partial \Lambda_i}{\partial \mu}(\Lambda)\right].$$

Une particule fluide qui se trouve à un instant déterminé en contact avec les parois conserve cette propriété dans tous les mouvements ultérieurs du fluide qui ont été définis comme étant compatibles avec ceux des parois et, en particulier, avec ceux de ces mouvements qui sont irrotationnels et acycliques. Ceux-ci sont définis par la formule (2), de sorte qu'à tout mouvement des parois correspond un et un seul mouvement irrotationnel et acyclique du fluide. Par exemple, à un déplacement virtuel de ces parois dans lequel les accroissements $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_r$ sont nuls à l'exception d'un seul δq correspond un déplacement irrotationnel et acyclique du fluide déterminé par

$$\delta\mu = \Lambda \delta q,$$

et l'accroissement correspondant d'une fonction φ considérée comme afférente à une particule déterminée du fluide primitivement située au point μ a pour expression

$$\varphi'_q \delta q + \frac{\partial \varphi}{\partial \mu}(\Lambda)\delta q.$$

Soit

$$f(\mu, q_1, q_2, \ldots, q_r) = 0$$

l'équation d'une surface formée par les parois ou par une portion de celles-ci. On peut, d'après ce qui précède, dériver cette équation par rapport à q en y considérant μ comme la position d'une particule déterminée du fluide en contact avec la paroi. On peut également la dériver par rapport à q_i dans les mêmes conditions. On obtient ainsi les deux relations

$$|\Lambda \nabla f| + f'_q = 0, \qquad |\Lambda_i \nabla f| + f'_{q_i} = 0.$$

On peut encore différentier ces deux nouvelles relations, la première par rapport à q_i, la seconde par rapport à q, toujours dans les

mêmes conditions, c'est-à-dire en considérant les divers éléments qui y figurent comme afférents à une particule fluide déterminée dont le mouvement suit celui des parois de la manière définie plus haut. En tenant compte de la commutativité des opérations de dérivation par rapport à q avec les opérations de dérivation géométrique exprimées par ∇, on obtient les deux nouvelles relations

$$[\nabla f\,\mathrm{A}'_{q_i}]+\left[\nabla f\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial\mu}(\mathrm{A}_i)\right]+[\mathrm{A}\,\nabla f'_{q_i}]+\left[\mathrm{A}\,\frac{\partial\nabla f}{\partial\mu}(\mathrm{A}_i)\right]+f''_{qq_i}+[\mathrm{A}_i\nabla f'_q]=0,$$

$$[\nabla f\,\mathrm{A}'_{iq}]+\left[\nabla f\frac{\partial \mathrm{A}_i}{\partial\mu}(\mathrm{A})\right]+[\mathrm{A}_i\nabla f'_q]+\left[\mathrm{A}_i\frac{\partial\nabla f}{\partial\mu}(\mathrm{A})\right]+f''_{q_iq}+[\mathrm{A}\,\nabla f'_{q_i}]=0.$$

En les retranchant membre à membre et observant que l'on a

$$f''_{qq_i}=f''_{q_iq},\qquad \left[\mathrm{A}\,\frac{\partial\nabla f}{\partial\mu}(\mathrm{A}_i)\right]=\left[\mathrm{A}_i\frac{\partial\nabla f}{\partial\mu}(\mathrm{A})\right],$$

il vient

$$[\nabla f\,\mathrm{A}'_{q_i}]+\left[\nabla f\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial\mu}(\mathrm{A}_i)\right]=[\nabla f\,\mathrm{A}'_{iq}]+\left[\nabla f\frac{\partial \mathrm{A}_i}{\partial\mu}(\mathrm{A})\right].$$

On peut évidemment remplacer dans cette relation ∇f par ν, et l'on obtient alors la relation qu'il s'agissait de démontrer. La formule (12) est donc acquise.

Exprimons maintenant $\frac{d\mathrm{T}_0}{dt}$. On a

$$\begin{aligned}\frac{d\mathrm{T}_0}{dt}&=\rho\int_{\mathrm{V}}\left[v_0\frac{dv_0}{dt}\right]\delta\tau=\rho\int_{\mathrm{V}}\left[v_0\frac{dv}{dt}\right]\delta\tau-\rho\int_{\mathrm{V}}\left[v_0\frac{dv_1}{dt}\right]\delta\tau\\&=\rho\int_{\mathrm{V}}\left[v_0\frac{dv}{dt}\right]\delta\tau-\rho\int_{\mathrm{V}}\left[v_0\frac{\partial v_1}{\partial t}\right]\delta\tau-\rho\int_{\mathrm{V}}\left[v_0\frac{\partial v_1}{\partial\mu}(v_1)\right]\delta\tau\\&\qquad-\rho\int_{\mathrm{V}}\left[v_0\frac{\partial v_1}{\partial\mu}(v_0)\right]\delta\tau.\end{aligned}$$

On a vu que, dans les fluides parfaits, l'accélération $\frac{dv}{dt}$ dérive d'un potentiel. Il en est évidemment de même de la dérivée $\frac{\partial v_1}{\partial t}$; enfin le vecteur $\frac{\partial v_1}{\partial\mu}(v_1)$ dérive, d'après la formule II (8), de la fonction $\frac{1}{2}[v_1^2]$.

Par suite, d'après une propriété plusieurs fois appliquée, les trois premiers termes du dernier membre sont nuls, et l'on a

$$\frac{dT_0}{dt} = -2\int_V \left| v_0 \frac{\partial v_1}{\partial \mu}(v_0) \right| \delta\tau.$$

On peut mettre le second membre de cette formule sous une autre forme. On a en effet, d'après la formule II (8),

$$\nabla[v_0 v_1] = \frac{\partial v_0}{\partial \mu}(v_1) + \frac{\partial v_1}{\partial \mu}(v_0) - \mathfrak{V}(2 w v_1), \qquad \left(\text{où } w = \frac{1}{2}\nabla_2 v\right)$$

et, par suite, par l'application de la formule II (7),

$$\nabla_1 \{ v_0 [v_0 v_1] \} = \left[v_0 \frac{\partial v_0}{\partial \mu}(v_1) \right] + \left[v_0 \frac{\partial v_1}{\partial \mu}(v_0) \right] - [v_0\, 2 w v_1],$$

et enfin, par l'application de la formule de Gauss,

$$(a) \qquad \int_V \left[v_0 \frac{\partial v_0}{\partial \mu}(v_1) \right] \delta\tau + \int_V \left[v_0 \frac{\partial v_1}{\partial \mu}(v_0) \right] \delta\tau = \int_V [v_0\, 2 w v_1] \delta\tau.$$

On a, d'autre part, par l'application de la formule II (10),

$$\frac{\partial v_0}{\partial \mu}(v_1) - \frac{\partial v_1}{\partial \mu}(v_0) = \nabla_2 \mathfrak{V}(v_0 v_1).$$

D'où, par l'application de la formule II (9),

$$\begin{aligned} \left[v_0 \frac{\partial v_0}{\partial \mu}(v_1) \right] - \left[v_0 \frac{\partial v_1}{\partial \mu}(v_0) \right] &= [v_0 \nabla_2 \mathfrak{V}(v_0 v_1)] \\ &= [v_0 v_1 \nabla_2 v_0] - \nabla_1 \{ \mathfrak{V}[v_0 \mathfrak{V}(v_0 v_1)] \} \\ &= [v_0 v_1\, 2 w] - \nabla_1 \{ v_0 [v_0 v_1] - v_1 [v_0^2] \}. \end{aligned}$$

D'où enfin, moyennant l'application de la formule de Gauss,

$$\left\{ \begin{aligned} &\int_V \left[v_0 \frac{\partial v_0}{\partial \mu}(v_1) \right] \delta\tau - \int_V \left[v_0 \frac{\partial v_1}{\partial \mu}(v_0) \right] \delta\tau \\ &\qquad = \int_S v_{1n} [v_0^2] \delta\tau - \int_V [v_0\, 2 w v_1] \delta\tau. \end{aligned} \right.$$

Les relations (a) et (b) sont réunies dans la suivante :

$$(13)\quad \left\{ \begin{aligned} \int_V \left[v_0 \frac{\partial v_0}{\partial \mu}(v_1) \right] \delta\tau &= -\int_V \left[v_0 \frac{\partial v_1}{\partial \mu}(v_0) \right] \delta\tau + \int_V [v_0\, 2\omega\, v_1]\,\delta\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_S v_{1n} [v_0^2]\, \delta\sigma. \end{aligned} \right.$$

Posons

$$(14)\quad \left\{ \begin{aligned} P_{0i} &= -\rho \int_V \left[v_0 \frac{\partial A_i}{\partial \mu}(v_0) \right] \delta\tau \\ &= \rho \int_V \left[v_0 \frac{\partial v_0}{d\mu}(A_i) \right] \delta\tau - \rho \int_V [v_0\, 2\omega\, A_i]\,\delta\tau \\ &= \frac{1}{2}\rho \int_S A_{in} [v_0^2]\, \delta\sigma + \rho \int_V [A_i\, 2\omega\, v_0]\,\delta\tau. \end{aligned} \right.$$

Il vient

$$\frac{dT_0}{dt} = \Sigma P_{0i} q'_i,$$

formule qui peut évidemment s'écrire

$$(15)\qquad dT_0 = \Sigma P_{0i}\, dq_i.$$

On a donc, moyennant les formules (10) et (15),

$$(16)\qquad dT = dT_1 + dT_0 = \Sigma P_{1i}\, dq_i + \Sigma P_{0i}\, dq_i.$$

On voit que dT est nul lorsque les parois restent fixes, ce qui est conforme aux principes de la Mécanique, puisque le travail des forces exercées sur le fluide est nul dans ce cas. Lorsque le mouvement du fluide est irrotationnel, la force vive est uniquement fonction des paramètres et de leurs dérivées; T_0 est uniquement fonction de ces paramètres, et l'on a alors

$$P_{0i} = \frac{\partial T_0}{\partial q_i}.$$

Nous avons encore à établir une formule préliminaire. On a, par la

voie qui a conduit aux formules (a) et (b), les relations

$$\int_V \left[v_0 \frac{\partial A}{\partial \mu}(v_1)\right] \partial\tau + \int_V \left[v_0 \frac{\partial v_1}{\partial \mu}(A)\right] \partial\tau = 0,$$

$$\int_V \left[v_0 \frac{\partial A}{\partial \mu}(v_1)\right] \partial\tau - \int_V \left[v_0 \frac{\partial v_1}{\partial \mu}(A)\right] \partial\tau$$
$$= \int_S v_{1n}[v_0 A] \partial\sigma - \int_S A_n [v_0 v_1] \partial\sigma - \int_V [A\, 2w\, v_1] \partial\tau.$$

Ces deux relations peuvent être réunies sous la forme suivante :

$$(17) \quad \begin{cases} 2\int_V \left[v_0 \frac{\partial A}{\partial \mu}(v_1)\right] \partial\tau = \int_V \left[v_0 \frac{\partial A}{\partial \mu}(v_1)\right] \partial\tau - \int_V \left[v_0 \frac{\partial v_1}{\partial \mu}(A)\right] \partial\tau \\ \qquad = \int_S \{v_{1n}[v_0 A] - A_n [v_0 v_1]\} \partial\sigma \\ \qquad - \int_V [A\, 2w\, v_1] \partial\tau. \end{cases}$$

Dans le cas où le mouvement est irrotationnel, le second membre de la formule précédente peut prendre une autre forme. Le champ déterminé par la vitesse v_0 ne dépend, dès lors, que des paramètres q, puisque les modules de circulation restent constants pendant le mouvement. On peut donc assigner une signification précise à l'expression v'_{0q}.

Cela posé, de la formule déjà utilisée,

$$\int_V [v_1 v_0] \partial\tau = 0,$$

on déduit, en dérivant par rapport à q,

$$\int_V [v_1 v'_{0q}] \partial\tau + \int_V \left[v_1 \frac{\partial v_0}{\partial \mu}(A)\right] \partial\tau + \int_V \left[v_0 \frac{\partial v_1}{\partial \mu}(A)\right] \partial\tau = 0.$$

On obtiendrait de même

$$\int_V [A \Sigma v'_{0q_i} q'_i] \partial\tau + \int_V \left[A \frac{\partial v_0}{\partial \mu}(v_1)\right] \partial\tau + \int_V \left[v_0 \frac{\partial A}{\partial \mu}(v_1)\right] \partial\tau = 0.$$

En retranchant ces deux relations membre à membre et observant

que les seconds termes sont égaux entre eux, l'on obtient

$$\int_V \left[v_0 \frac{\partial A}{\partial \mu}(v_1) \right] \delta\tau - \int_V \left[v_0 \frac{\partial v_1}{\partial \mu}(A) \right] \delta\tau$$
$$= \int_V [v_1 v'_{0q}] \delta\tau - \int_V [A \Sigma v'_{0q_i} q'_i] \delta\tau.$$

Dans le cas qui nous occupe, le vecteur v_0 admet une fonction potentielle φ_0. On a donc

$$v'_{0q_i} = \nabla \varphi'_{0q_i}$$

et, par suite,

$$[v_1 v'_{0q}] = \frac{\partial \varphi'_{0q}}{\partial \mu}(v_1), \qquad [A \Sigma v'_{0q_i} q'_i] = \sum \left[\frac{\partial \varphi'_{0q_i}}{\partial \mu}(A) q'_i \right].$$

Posons

$$G_i = \int_V \varphi'_{0q_i} \delta\tau, \qquad G = \int_V \varphi'_{0q} \delta\tau.$$

On a, en appliquant la formule (7),

$$\sum \left(\frac{\partial G}{\partial q_i} - \frac{\partial G_i}{\partial q} \right) q'_i = \int_V \left[\frac{\partial \varphi'_{0q}}{\partial \mu}(v_1) - \sum \frac{\partial \varphi'_{0q_i}}{\partial \mu}(A) \right] q'_i \delta\tau.$$

On a donc enfin, pour l'expression du second membre de (17),

$$\int_V \left[v_0 \frac{\partial A}{\partial \mu}(v_1) \right] \delta\tau - \int_V \left[v_0 \frac{\partial v_1}{\partial \mu}(A) \right] \delta\tau = \sum \left(\frac{\partial G}{\partial q_i} - \frac{\partial G_i}{\partial q} \right) q'_i.$$

IV. — Actions sur les parois.

L'effet d'un groupe de forces sur le mouvement d'un système matériel dépend uniquement de l'expression du travail de ces forces dans tout déplacement virtuel du système. Nous nous proposons de déterminer une expression du travail δL développé par les pressions exercées par un fluide parfait incompressible sur les parois qui le limitent dans tout déplacement virtuel de ces parois.

Le fluide d'une part et les parois de l'autre constituent deux systèmes matériels (S) et (S′) ayant entre eux des liaisons telles que le travail

des forces qu'elles développent est nul dans tout déplacement de l'ensemble compatible avec ces liaisons. Le travail développé dans un déplacement quelconque de (S') par les forces exercées sur ce système en vertu de ses liaisons avec (S) est donc égal et de signe contraire au travail développé par les forces de liaison exercées sur (S) dans tout déplacement de S compatible avec le déplacement considéré de (S').

On est donc ramené à déterminer le travail des forces exercées par (S') sur (S) dans un déplacement virtuel de (S) compatible avec le déplacement virtuel considéré de (S'). Ce dernier travail, c'est-à-dire $-\delta L$, se détermine facilement en fonction du travail des forces extérieures qui s'exercent sur (S) et des éléments du mouvement de ce système. Si l'on désigne par δW le travail des forces extérieures et par δI le travail des forces d'inertie, l'équation générale de la Dynamique, appliquée à (S), s'écrit

$$\delta W - \delta L + \delta I = 0,$$

ou, en désignant par ρ la densité constante du fluide et par v sa vitesse (en grandeur et en direction) en un point quelconque μ,

$$(1) \qquad \delta L = \delta W - \rho \int_V \left[\frac{dv}{dt} \delta\mu \right] \delta\tau.$$

Si la force extérieure ρF agissant sur un élément du fluide dérive d'une fonction des forces ρV, on a

$$\delta W = \rho \int_V [F \delta\mu] \delta\tau = \rho \int_V \delta V \delta\tau,$$

et, si l'on suppose la valeur de V déterminée en tout point de l'espace indépendamment de la position du fluide et des parois,

$$\delta W = \rho \delta \int_V V \delta\tau.$$

La variation qui figure au second membre est évidemment égale à la somme des éléments ajoutés à l'intégrale en raison du mouvement des parois. Le déplacement virtuel d'un point de la paroi et le déplacement virtuel du point du fluide en contact avec lui ont même compo-

sante normale; on a donc finalement

$$(2) \qquad \delta W = \rho\,\delta \int_V V\,\delta\tau = \rho \int_S V[\nu\,\delta\mu]\,\delta\sigma.$$

Pour exprimer le second terme de δL, l'on supposera, comme dans le paragraphe précédent, que la position des parois est déterminée par les valeurs de r paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_r$, et l'on a vu qu'un déplacement virtuel de ces parois déterminé par les accroissements $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_r$ est compatible avec une infinité de déplacements du fluide parmi lesquels se trouve celui qui est déterminé par

$$\delta\mu = \Sigma A_i\,\delta q_i.$$

On a donc

$$\rho \int_V \left[\frac{dv}{dt}\,\delta\mu\right]\delta\tau = \rho \int_V \left[\frac{dv}{dt}\,\Sigma A_i\,\delta q_i\right]\delta\tau = \sum \rho \int_V \left[\frac{dv}{dt}\,A_i\right]\delta\tau\,\delta q_i$$

et, par suite, en posant

$$Q_i = \rho \int_V \left[\frac{dv}{dt}\,A_i\right]\delta\tau,$$

on écrira

$$(3) \qquad \delta L = \delta W - \Sigma Q_i\,\delta q_i.$$

Nous ne nous occuperons pas davantage des forces extérieures et nous nous attacherons, dans ce qui va suivre, à transformer l'expression du dernier terme de la formule (3).

La formule qui donne l'expression d'un coefficient Q est de la même forme que celles dont on déduit les équations de Lagrange relatives à un système matériel dont la position est déterminée par r paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_r$. Mais, dans le cas actuel, le système matériel dont les éléments dynamiques figurent dans la formule (3) n'admet pas pour paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_r$. La position de ce système dépend de ces paramètres, mais n'est pas déterminée par eux. On doit donc s'attendre à ne pas pouvoir appliquer *de plano* les transformations de Lagrange. Toutefois, une première transformation est évidemment

possible. On a en effet

$$\rho \int_V [vA]\, \delta\tau = \rho \int_V \left[v \frac{\partial v}{\partial q'} \right] = \frac{\partial T}{\partial q'}$$

et, par suite,

$$Q = \rho \int_V \left[\frac{dv}{dt} A \right] \delta\tau = \frac{d}{dt} \frac{dT}{\partial q'} - \rho \int_V \left[v \frac{dA}{dt} \right] \delta\tau. \tag{4}$$

Il s'agit maintenant de transformer le dernier terme. On a

$$\frac{dA}{dt} = \Sigma A'_{q_i} q'_i + \frac{\partial A}{\partial \mu}(v_1) + \frac{\partial A}{\partial \mu}(v_0). \tag{5}$$

D'où

$$\begin{aligned}\int_V \left[v \frac{dA}{dt} \right] \delta\tau = & \int_V [v_1 \Sigma A'_{q_i} q'_i]\, \delta\tau + \int_V \left[v_1 \frac{\partial A}{\partial \mu}(v_1) \right] \delta\tau \\ & + \int_V [v_0 \Sigma A'_{q_i} q'_i]\, \delta\tau + \int_V \left[v_0 \frac{\partial A}{\partial \mu}(v_1) \right] \delta\tau \\ & + \int_V \left[v_0 \frac{\partial A}{\partial \mu}(v_0)\, \delta\tau \right] + \int_V \left[v_1 \frac{\partial A}{\partial \mu}(v_0) \right] \delta\tau.\end{aligned}$$

Le premier terme de la seconde ligne est nul en vertu de la formule III (5) : on a de plus, le vecteur A admettant une fonction potentielle,

$$\left[v_0 \frac{\partial A}{\partial \mu}(v_1) \right] = \left[v_1 \frac{\partial A}{\partial \mu}(v_0) \right].$$

En tenant compte de ces deux relations, il vient

$$\begin{aligned}\int_V \left[v \frac{dA}{dt} \right] \delta\tau = & \int_V [v_1 \Sigma A'_{q_i} q'_i]\, \delta\tau + \int_V \left[v_1 \frac{\partial A}{\partial \mu}(v_1) \right] \delta\tau \\ & + 2 \int_V \left[v_0 \frac{\partial A}{\partial \mu}(v_1) \right] \delta\tau + \int_V \left[v_0 \frac{\partial A}{\partial \mu}(v_0) \right] \delta\tau.\end{aligned}$$

On a, par suite, moyennant les formules III (12), (14) et (17),

$$\begin{aligned}\rho \int_V \left[v \frac{dA}{dt} \right] \delta\tau = & \frac{\partial T_1}{\partial q} + \rho \int_S \{ v_{1n} [v_0 A] - A_n [v_0 v_1] \}\, \delta\sigma \\ & - \rho \int_V [A\, 2w v_1]\, \delta\tau - P_0.\end{aligned}$$

La formule (4) devient donc, moyennant la formule III (9),

$$(6)\quad Q = P_1 + P_0 + \rho \int_S \{A_n[v_0 v_1] - v_{1n}[v_0 A]\} \delta\sigma + \rho \int_V [A\, 2\varpi v_1]\, \delta\tau,$$

où l'on a

$$P_1 = \frac{d}{dt}\frac{\partial T_1}{\partial q'} - \frac{\partial T_1}{\partial q},$$

$$P_0 = \frac{1}{2}\rho \int_S A_n [v_0]^2 \delta\tau + \rho \int_V [A\, 2\varpi v_0]\, \delta\tau.$$

Dans le cas où le mouvement est irrotationnel, on a vu que T_0 est uniquement fonction des paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_r$, les modules de circulation restant constants. On a alors

$$\varpi = 0, \qquad P_0 = \frac{\partial T_0}{\partial q},$$

et la formule (6) devient

$$Q = \frac{d}{dt}\frac{\partial T_1}{\partial q'} - \frac{\partial T_1}{\partial q} + \rho \int_S \{A_n[v_0 v_1] - v_{1n}[v_0 A]\} \delta\sigma + \frac{\partial T_0}{\partial q},$$

ou enfin, eu égard aux formules établies à la fin du paragraphe III,

$$Q = \frac{d}{dt}\frac{\partial T_1}{\partial q'} - \frac{\partial T_1}{\partial q} + \rho \sum \left(\frac{\partial G}{\partial q_i} - \frac{\partial G_i}{\partial q}\right) q'_i + \frac{\partial T_0}{\partial q},$$

où l'on a posé

$$G = \int_V \varphi'_{0q}\, \delta\tau, \qquad G_i = \int_V \varphi'_{0q_i}\, \delta\tau,$$

φ_0 étant la fonction potentielle du champ irrotationnel (cyclique) déterminé par la vitesse v_0.

Sous cette forme, l'expression de Q est identique à celle qui a été donnée par Carl Neumann.

On peut vérifier que l'expression (6) de Q satisfait au théorème des forces vives. On a, d'après la formule (3),

$$dL = dW - \Sigma Q_i\, dq_i.$$

D'autre part, le théorème des forces vives appliqué au fluide

s'exprime par la formule

$$dW - dL = dT$$

ou

$$\Sigma Q_i q'_i = \frac{dT}{dt}.$$

On a, d'après la formule III (16),

$$\Sigma P_{1i} q'_i + \Sigma P_{0i} q'_i = \frac{dT}{dt}.$$

On a d'ailleurs

$$\sum \left\{ \int_S \Lambda_{in} [v_0 v_1] \partial\sigma q'_i \right\} - \sum \left\{ \int_S v_{1n} [v_0 \Lambda_i] \partial\sigma q'_i \right\}$$
$$= \int_S v_{1n} [v_0 v_1] \partial\sigma - \int_S v_{1n} [v_0 v_1] \partial\sigma = 0$$

et enfin

$$\sum \left\{ \int_V [\Lambda_i \, 2w v_1] \partial\tau q'_i \right\} = \int_V [v_1 \, 2w v_1] \partial\tau = 0.$$

Formulaire.

II.

$$(1) \quad \begin{cases} [FF'] = XX' + YY' + ZZ', \\ \mathfrak{V}(FF') = (YZ' - ZY', ZX' - XZ', XY' - YX'), \\ [FF'F''] = [F\mathfrak{V}(F'F'')] = [\mathfrak{V}(FF')F''] = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ X' & Y' & Z' \\ X'' & Y'' & Z'' \end{vmatrix}, \end{cases}$$

$$(2) \quad \frac{dF}{dq} = \left(\frac{dX}{dq}, \frac{dY}{dq}, \frac{dZ}{dq} \right),$$

$$(3) \quad dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = \frac{dF}{d\mu}(d\mu),$$

$$(4) \quad \begin{cases} \nabla_1 F = \dfrac{\partial X}{\partial x} + \dfrac{\partial Y}{\partial y} + \dfrac{\partial Z}{\partial z}, \\ \nabla_2 F = \left(\dfrac{\partial Z}{\partial y} - \dfrac{\partial Y}{\partial z}, \dfrac{\partial X}{\partial z} - \dfrac{\partial Z}{\partial x}, \dfrac{\partial Y}{\partial x} - \dfrac{\partial X}{\partial y} \right), \end{cases}$$

(5) $\nabla U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right)$ (U, fonction numérique),

(6) $\int_V [\nabla_1 F]\,\delta\tau = \int_S [\nu F]\,\delta\sigma = \int_S F_n\,\delta\sigma,$

(7) $\nabla_1(UF) = U\nabla_1 F + [F\nabla U].$

(8) $\nabla[FF'] = \frac{dF}{d\mu}(F') + \frac{dF'}{d\mu}(F) + \mathfrak{V}(F\nabla_2 F') + \mathfrak{V}(F'\nabla_2 F),$

(9) $\nabla_1 \mathfrak{V}(FF') = [F'\nabla_2 F] - [F\nabla_2 F'],$

(10) $\nabla_2 \mathfrak{V}(FF') = \frac{dF}{d\mu}(F') - \frac{dF'}{d\mu}(F) + F\nabla_1 F' - F'\nabla_1 F.$

III.

(1) $v = v_0 + v_1 = A_0 + \Sigma A_i q'_i, \qquad A_i = \nabla\varphi_i,$

(2) $\delta\mu = \Sigma A_i\,\delta q_i,$

(3) $\int_V [v_0 v_1]\,\delta\tau = \int_S \psi v_{0n}\,\delta\sigma = 0,$

(4) $\int_V [v_0 A_i]\,\delta\tau = 0,$

(5) $\int_V [v_0 A'_{iq}]\,\delta\tau = 0,$

(6) $T = \frac{1}{2}\rho\int_V [v_0^2]\,\delta\tau + \frac{1}{2}\rho\int_V [v_1^2]\,\delta\tau = T_0 + T_1,$

(7) $\frac{\partial \Psi}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i}\int_V \psi\,\delta\tau = \int_V \psi'_q\,\delta\tau + \int_V \frac{\partial\psi}{\partial\mu}(A_i)\,\delta\tau,$

(8) $\frac{dT_1}{dt} = \sum \frac{\partial T_1}{\partial q'_i} q''_i + \sum \frac{\partial T_1}{\partial q_i} q'_i.$

(9) $P_{1i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T_1}{\partial q'_i} - \frac{\partial T_1}{\partial q_i},$

(10) $dT_1 = \Sigma P_{1i}\,dq_i,$

(11) $\frac{\partial T_1}{\partial q'} = \frac{\partial T}{\partial q'} = \rho\int_V [v_1 A]\,\delta\tau.$

(12) $$\frac{\partial T_1}{\partial q} = \rho \int_V |v_1 \Sigma A'_{q_i} q'_i| \delta\tau + \rho \int_V \left[v_1 \frac{\partial A}{\partial \mu}(v_1) \right] \delta\tau,$$

(13) $$\left\{ \begin{aligned} \int_V \left[v_0 \frac{\partial v_0}{\partial \mu}(v_1) \right] \delta\tau &= -\int_V \left[v_0 \frac{\partial v_1}{\partial \mu}(v_0) \right] \delta\tau + \int_V |v_0 \, 2\omega v_1| \delta\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_S v_{1n} |v_0^2| \delta\sigma, \qquad \left(\omega = \frac{1}{2} \Gamma_2 v \right) \end{aligned} \right.$$

(14) $$\left\{ \begin{aligned} P_{0i} &= -\rho \int_V \left[v_0 \frac{\partial A_i}{\partial \mu}(v_0) \right] \delta\tau \\ &= \rho \int_V \left[v_0 \frac{\partial v_0}{\partial \mu}(A_i) \right] \delta\tau - \rho \int_V |v_0 \, 2\omega A_i| \delta\tau \\ &= \frac{1}{2} \rho \int_S A_{in} |v_0^2| \delta\sigma + \rho \int_V |A_i \, 2\omega v_0| \delta\tau, \end{aligned} \right.$$

(15) $$dT_0 = \Sigma P_{0i} \, dq_i.$$

(16) $$dT = dT_1 + dT_0 = \Sigma P_{1i} \, dq_i + \Sigma P_{0i} \, dq_i,$$

(17) $$\left\{ \begin{aligned} & 2 \int_V \left[v_0 \frac{\partial A}{\partial \mu}(v_1) \right] \delta\tau \\ &= \int_V \left[v_0 \frac{\partial A}{\partial \mu}(v_1) \right] \delta\tau - \int_V \left[v_0 \frac{\partial v_1}{\partial \mu}(A) \right] \delta\tau \\ &= \int_S \{ v_{1n} |v_0 A| - A_n |v_0 v_1| \} \delta\sigma - \int_V |A \, 2\omega v_1| \delta\tau. \end{aligned} \right.$$

IV.

(1) $$\delta L = \delta W - \rho \int_V \left[\frac{dv}{dt} \delta\mu \right] \delta\tau,$$

(2) $$\delta W = \rho \, \delta \int_V V \, \delta\tau = \rho \int_S V |\nu \, \delta\mu| \delta\sigma,$$

(3) $$\delta L = \delta W - \Sigma Q_i \, \delta q_i,$$

(4) $$Q = \rho \int_V \left[\frac{dv}{dt} A \right] \delta\tau = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'} - \rho \int_V \left[v \frac{dA}{dt} \right] \delta\tau,$$

(5) $$\frac{dA}{dt} = \Sigma A'_{q_i} q'_i + \frac{\partial A}{\partial \mu}(v_1) + \frac{\partial A}{\partial \mu}(v_0),$$

(6) $$Q = P_1 + P_0 + \rho \int_S \{ A_n |v_0 v_1| - v_{1n} |v_0 A| \} \delta\sigma + \rho \int_V |A \, 2\omega v_1| \delta\sigma.$$

Sur les périodes des intégrales doubles;

PAR M. H. POINCARÉ.

§ 1. — Introduction.

La détermination du nombre des périodes cycliques d'une intégrale double exige une grande attention, comme toutes les questions d'*Analysis situs*, dès que le nombre des dimensions dépasse 3. M. Picard a abordé la question dans son Ouvrage sur les fonctions algébriques de deux variables, que je citerai souvent.

Je m'en suis occupé moi-même dans un Mémoire intitulé : *Sur les cycles des surfaces algébriques*, et inséré au *Journal de Liouville* en 1902. C'est à ce Mémoire que je renverrai quand je parlerai sans autre explication du *Mémoire cité*.

L'application des règles posées dans ce Mémoire présente quelquefois quelques difficultés; la question du nombre des cycles ne se pose pas d'une façon aussi simple que dans le cas des courbes algébriques, puisqu'il y a plusieurs manières d'envisager les points à l'infini et que le nombre des cycles ne reste pas le même quelle que soit la convention adoptée. D'autre part, il peut arriver que ce nombre ne soit pas le même pour deux surfaces, bien que l'on puisse passer de l'une à l'autre par une transformation birationnelle. C'est ce qu'a montré M. Picard.

Si l'on ne fait pas attention à ces circonstances, il peut arriver qu'on soit conduit à d'apparentes contradictions et que le nombre des cycles d'une surface, tel que le donnent les règles, ne demeure pas le même quand on change d'axes de coordonnées.

C'est ce qui m'a déterminé à revenir encore une fois sur la question et d'ailleurs sans l'épuiser. J'ai modifié la convention relative aux points à l'infini, de façon que tout devienne projectif et que les résultats se présentent sous une forme plus simple.

J'ai obtenu ainsi une formule générale et je l'ai appliquée aux surfaces du troisième degré.

Ces surfaces présentent, au point de vue qui nous occupe, des propriétés qui semblent paradoxales, sur lesquelles M. Picard a déjà attiré l'attention. C'est ce qui m'a engagé à les étudier en détail.

Il faudrait, pour aller plus loin, étudier les cas où la surface présente d'autres singularités que les singularités ordinaires qui caractérisent les surfaces auxquelles toutes les autres peuvent être ramenées par une transformation birationnelle; c'est-à-dire les cas où la variété à quatre dimensions correspondante présente un point singulier. Mais je n'ai pas abordé ce problème. Je me suis contenté de dire quelques mots au sujet du point conique ordinaire, et sans épuiser la question.

§ 2. — Intégrales doubles relatives à une surface.

Soit

$$F(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

une surface algébrique quelconque, et soit

$$J = \int\int \frac{P\,dx\,dy}{F'_z} = \int\int \frac{P\,dy\,dz}{F'_x} = \int\int \frac{P\,dz\,dx}{F'_y} \tag{2}$$

une intégrale double relative à cette surface; P étant une fonction rationnelle de x, y, z. Nous supposerons cette intégrale prise le long d'un domaine à deux dimensions que j'appellerai K et qui sera généralement un cycle fermé.

Soit maintenant

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 1 \tag{3}$$

un plan variable quelconque, et soit C l'intersection de ce plan variable avec la surface (1). Nous pourrons supposer que le domaine d'in-

tégration K est engendré de la façon suivante : le plan (3) variera d'une manière continue ; en même temps, nous envisagerons, sur la surface de Riemann correspondant à la courbe algébrique C, un cycle fermé k ; quand le plan (3) variera d'une manière continue, ce cycle k variera également d'une manière continue, et ce sont les positions successives du cycle à une dimension k qui engendreront le cycle à deux dimensions K. Que devient dans ces conditions notre intégrale double?

Posons

$$(4)\qquad \begin{cases} X = \beta F'_z - \gamma F'_y, \\ Y = \gamma F'_x - \alpha F'_z, \\ Z = \alpha F'_y - \beta F'_x. \end{cases}$$

Posons encore

$$u = \lambda x + \mu y + \nu z,$$

λ, μ et ν étant des constantes quelconques; supposons que les coefficients variables α, β, γ de l'équation (3) soient des fonctions d'une certaine variable t et prenons u et t pour nouvelles variables indépendantes. Il s'agit de calculer le déterminant fonctionnel des anciennes variables x et y par rapport aux nouvelles u et t.

Pour cela, nous avons les équations suivantes :

$$(5)\qquad \begin{cases} du = \lambda\, dx + \mu\, dy + \nu\, dz, \\ -dt \sum x \dfrac{d\alpha}{dt} = \alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz, \\ dF = F'_x\, dx + F'_y\, dy + F'_z\, dz. \end{cases}$$

Si donc nous posons

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \alpha & \beta & \gamma \\ F'_x & F'_y & F'_z \end{vmatrix} = \lambda X + \mu Y + \nu Z,$$

nous trouverons

$$\frac{\partial(u, t, F)}{\partial(x, y, z)} = -\frac{D}{\sum x \dfrac{d\alpha}{dt}}.$$

D'autre part

$$\frac{d(u, t, \mathrm{F})}{\partial(x, y, z)} = \frac{\partial(u, t, \mathrm{F})}{\partial(u, t, z)} \frac{\partial(u, t, z)}{\partial(x, y, z)} = \mathrm{F}'_z \frac{\partial(u, t)}{\partial(x, y)},$$

d'où enfin

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, t)} = -\frac{\mathrm{F}'_z \sum x \frac{d\alpha}{dt}}{\mathrm{D}},$$

de sorte que notre intégrale double devient

$$\mathrm{J} = -\int\int \frac{\mathrm{P} \sum x \frac{d\alpha}{dt} du\, dt}{\mathrm{D}},$$

ou bien

$$(6) \qquad \mathrm{J} = \int (\mathrm{A}\, d\alpha + \mathrm{B}\, d\beta + \mathrm{C}\, d\gamma)$$

avec

$$(7) \qquad \mathrm{A} = \int \frac{\mathrm{P} x\, du}{\mathrm{D}}, \qquad \mathrm{B} = \int \frac{\mathrm{P} y\, du}{\mathrm{D}}, \qquad \mathrm{C} = \int \frac{\mathrm{P} z\, du}{\mathrm{D}}.$$

On peut annuler deux des trois coefficients arbitraires λ, μ, ν, en faisant l'autre égal à 1; on trouve ainsi, par exemple,

$$(7\ bis) \qquad \mathrm{A} = \int \frac{\mathrm{P} x\, dx}{\mathrm{X}} = \int \frac{\mathrm{P} x\, dy}{\mathrm{Y}} = \int \frac{\mathrm{P} x\, dz}{\mathrm{Z}}.$$

Les intégrales (7) et (7 *bis*) sont des intégrales abéliennes *simples* relatives à la courbe algébrique C; et si, comme nous l'avons supposé, le chemin d'intégration k est un cycle fermé, ce sont des périodes de ces intégrales abéliennes.

Nous devons nous attendre à ce que

$$\mathrm{A}\, d\alpha + \mathrm{B}\, d\beta + \mathrm{C}\, d\gamma$$

soit une différentielle exacte, et c'est en effet ce qui arrive. Vérifions que

$$(8) \qquad \frac{d\mathrm{A}}{d\beta} = \frac{d\mathrm{B}}{d\alpha}.$$

Quand nous allons parcourir le cycle k, le point u va décrire dans son plan une certaine courbe fermée; nous pourrons toujours supposer que cette courbe ne varie pas quand on donne à β, par exemple, un accroissement très petit.

En effet, par hypothèse, notre cycle k est fermé et varie d'une manière continue. Si donc k' est la courbe fermée décrite par u dans son plan, si k'' est ce que devient cette même courbe quand β se change en $\beta + d\beta$, ces deux courbes fermées k' et k'' différeront infiniment peu. On aura toujours pu choisir k' de façon que cette courbe passe à distance finie de tous les points singuliers. Il n'y aura pas alors de point singulier entre k' et k''. L'intégrale le long de k'' est donc égale à l'intégrale le long de k'; on peut remplacer la courbe k'' par la courbe k', c'est-à-dire supposer que la courbe k' n'a pas varié. Cela nous permet de calculer $\frac{dA}{d\beta}$ par différentiation sous le signe $\int$ en regardant le chemin d'intégration comme invariable. On trouve ainsi

$$\frac{dA}{d\beta} = \int \frac{d}{d\beta}\left(\frac{P.x}{D}\right) du,$$

en remarquant que

$$\frac{d}{d\beta} = \frac{d}{dx}\frac{dx}{d\beta} + \frac{d}{dy}\frac{dy}{d\beta} + \frac{d}{dz}\frac{dz}{d\beta} + \frac{\partial}{\partial\beta},$$

en représentant par $\frac{\partial}{\partial\beta}$ avec des ∂ ronds la dérivée prise par rapport à β en tant que cette variable figure explicitement dans $\frac{P.x}{D}$, mais en regardant x, y, z comme des constantes.

Nous observerons que, dans le numérateur $P.x$, la lettre β ne figure pas explicitement, mais qu'elle figure dans D et que l'on a

$$\frac{\partial D}{\partial\beta} = (\lambda F'_z - \nu F'_x).$$

Maintenant, pour calculer $\frac{dx}{d\beta}, \frac{dy}{d\beta}, \frac{dz}{d\beta}$, il faut dans les équations (5) faire $du = 0$, puisque notre chemin d'intégration est invariable; $dF = 0$, puisque l'équation (1) a toujours lieu; $d\alpha = d\gamma = 0$, puisque

pour chercher la dérivée partielle par rapport à β il faut regarder les deux autres variables α et γ comme des constantes. On trouve ainsi

$$(5\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} 0 &= \sum \lambda\, dx, \\ -y\, d\beta &= \sum \alpha\, dx, \\ 0 &= \sum F'_x\, dx. \end{aligned}\right.$$

Nous y adjoignons l'identité

$$(9)\quad d\left(\frac{Px}{D}\right) = x\left(\frac{dQ}{dx}dx + \frac{dQ}{dy}dy + \frac{dQ}{dz}dz\right) + \frac{P}{D}dx - \frac{Px}{D^2}\frac{\partial D}{\partial \beta}d\beta,$$

en posant

$$Q = \frac{P}{D}.$$

Les équations (5 *bis*) nous donnent d'abord

$$D\left(\frac{dQ}{dx}dx + \frac{dQ}{dy}dy + \frac{dQ}{dz}dz\right) = y\, d\beta \begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ F'_x & F'_y & F'_z \\ Q'_x & Q'_y & Q'_z \end{vmatrix} = y\,\Delta\, d\beta,$$

et d'autre part

$$D\frac{dx}{d\beta} = y(\mu F'_z - \nu F'_y).$$

Si donc dans l'équation (9) nous remplaçons $\sum \frac{dQ}{dx}dx$, dx et $\frac{\partial D}{\partial \beta}$ par leurs valeurs, nous trouverons

$$\frac{d}{d\beta}\left(\frac{Px}{D}\right) = \frac{xy\Delta}{D} + \frac{D}{D^2}[y(\mu F'_z - \nu F'_y) - x(\lambda F'_z - \nu F'_x)].$$

On trouverait de même

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{Px}{D}\right) = \frac{xy\Delta}{D} + \frac{D}{D^2}[-x(\lambda F'_z + \nu F'_x) + y(\mu F'_z - \nu F'_y)],$$

et l'identité des deux expressions suffit pour démontrer l'égalité (8).

Donc $A\,d\alpha + B\,d\beta + C\,d\gamma$ est une différentielle exacte.

C. Q. F. D.

Afin de ne pas exclure le cas où le plan (3) passe par l'origine, il convient de rendre l'équation de ce plan homogène en l'écrivant

(3 *bis*) $$\alpha x + \beta y + \gamma z = \varepsilon.$$

Il vient alors

$$dJ = A_1\,d\frac{\alpha}{\varepsilon} + B_1\,d\frac{\beta}{\varepsilon} + C_1\,d\frac{\gamma}{\varepsilon},$$

A_1, B_1, C_1 étant ce que deviennent A, B, C quand on y remplace α, β, γ par $\frac{\alpha}{\varepsilon}$, $\frac{\beta}{\varepsilon}$, $\frac{\gamma}{\varepsilon}$; dans ces conditions, le déterminant D se change en

$$D_1 = \frac{D}{\varepsilon}.$$

Il vient ainsi

$$A_1 = \int \frac{Px\,du}{D_1} = \varepsilon \int \frac{Px\,du}{D} = A\varepsilon,$$

d'où

$$A_1\,d\frac{\alpha}{\varepsilon} = A\,d\alpha - \frac{A\alpha\,d\varepsilon}{\varepsilon},$$

d'où enfin

(6 *bis*) $$dJ = A\,d\alpha + B\,d\beta + C\,d\gamma - E\,d\varepsilon,$$

où

$$E = \frac{A\alpha + B\beta + C\gamma}{\varepsilon} = \int \frac{P(\alpha x + \beta y + \gamma z)\,du}{D\varepsilon},$$

ou en vertu de l'équation (3 *bis*) :

(10) $$E = \int \frac{P\,du}{D}.$$

Considérons alors J comme fonction de α, β, γ, ε; nous partirons de certaines valeurs initiales de ces variables, par exemple les

valeurs 1, 0, 0, 1 (c'est-à-dire le plan $x = 1$), et nous les ferons varier d'une manière continue et par un chemin quelconque jusqu'à leurs valeurs finales α, β, γ, ε; le cycle à une dimension k variera aussi d'une manière continue et engendrera une variété à deux dimensions K qui ne sera pas fermée, mais qui aura une frontière formée du cycle initial (c'est-à-dire du cycle k de la surface de Riemann correspondant au plan initial $x = 1$) et du cycle final (c'est-à-dire du cycle k de la surface de Riemann correspondant au plan final $\alpha x + \beta y + \gamma z = \varepsilon$). C'est le long de cette variété K que sera prise l'intégrale double J.

L'intégrale J est une fonction multiforme des variables α, β, γ, ε; parce que les cycles k s'échangent entre eux lorsque ces variables tournent autour d'un point singulier, et parce que l'intégrale J prend deux valeurs différentes, quand les variables vont de leurs valeurs initiales à leurs valeurs finales par deux chemins différents, si entre ces deux chemins il y a un point singulier.

Quels sont ces points singuliers; ce sont ceux qui correspondent au cas où le plan (3 *bis*) est tangent à la surface (1).

Considérons d'abord le cycle k et les valeurs correspondantes des intégrales A, B, C, E comme des fonctions des variables α, β, γ, ε; quand les variables ayant tourné autour d'un point singulier reviendront à leurs valeurs initiales, le cycle k se transformera en un autre cycle de la même surface de Riemann. Soient k_1, k_2, ..., k_{2p} les cycles fondamentaux de cette surface de Riemann (que je suppose de genre p). Après une rotation autour du point singulier, ils se transformeront en d'autres cycles de la même surface, qui devront être eux-mêmes des combinaisons des cycles fondamentaux k_1, k_2, ..., k_{2p}.

Soient alors A_1, A_2, ..., A_{2p} les valeurs de l'intégrale A correspondant à ces $2p$ cycles; ce sont les périodes fondamentales de l'intégrale abélienne indéfinie A. Elles se transformeront en A'_1, A'_2, ..., A'_{2p} et les A'_i ne seront autre chose que des combinaisons linéaires des A_i, à coefficients constants et entiers.

Donc A, considéré comme fonction de l'une des variables α, β, γ, ε, satisfait à une équation différentielle linéaire d'ordre $2p$, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de α, β, γ, ε; plus généralement, entre $2p + 1$ dérivées partielles de A par rapport aux quatre variables (parmi lesquelles la fonction A elle-même pourra être com-

prise), il y a toujours une relation dont les coefficients seront des fonctions rationnelles de α, β, γ, ε.

Il en sera de même en ce qui concerne B, C et E. Mais il y a quelque chose de plus. Quand les variables tournent autour d'un point singulier, B, C et E subissent *la même* transformation linéaire que A. Il en résulte que nous aurons encore une relation de même forme, non seulement entre $2p+1$ dérivées de A, mais entre $2p+1$ dérivées quelconques, appartenant les unes à A, les autres à B, C ou E, les fonctions A, B, C et E elles-mêmes n'étant pas exclues.

Mais A, B, C, E sont les dérivées du premier ordre de J; et les dérivées de ces quatre fonctions sont aussi des dérivées partielles de J, de sorte que nous arrivons finalement au résultat suivant :

Entre $2p+1$ dérivées partielles quelconques de J (*la fonction* J *étant exclue*) *il y a toujours une relation linéaire dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de* α, β, γ, ε.

Prenons un nombre suffisant de semblables relations, en assez grand nombre pour que toutes les autres n'en soient plus que des conséquences; nous aurons un système de relations que j'appellerai le système (S). Il suffira, par exemple, pour cela de prendre les quatre équations

$$(\mathrm{S})\qquad \left\{\begin{array}{ll} \sum Q_i \dfrac{d^i J}{d\alpha^i} = 0, & \dfrac{dJ}{d\beta} = \sum R_i^1 \dfrac{d^i J}{d\alpha^i}, \\ \dfrac{dJ}{d\gamma} = \sum R_i^2 \dfrac{d^i J}{d\alpha^i}, & \dfrac{dJ}{d\varepsilon} = \sum R_i^3 \dfrac{d^i J}{d\alpha^i}; \end{array}\right.$$

Q_i, R_i^1, R_i^2, R_i^3 sont des fonctions rationnelles de α, β, γ, ε; dans la première équation (S) l'indice i peut prendre les valeurs $1, 2, \ldots, 2p+1$; dans les trois autres il peut prendre les valeurs $1, 2, \ldots, 2p$. Qu'arrive-t-il maintenant de J quand les variables tournent autour d'un point singulier? Considérons par exemple les $2p$ déterminations de A :

$$A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_{2p}$$

définies plus haut et soient

$$J_1, \quad J_2, \quad \ldots, \quad J_{2p}$$

les déterminations correspondantes de J. Supposons que, quand on tourne autour du point singulier, A_i se change en

$$\sum \lambda_{ik} A_k,$$

les λ_{ik} étant des coefficients constants et entiers comme on l'a expliqué plus haut; alors J_i se changera en

$$\sum \lambda_{ik} J_k + H_i,$$

H_i étant une constante.

Une combinaison quelconque $\sum \lambda_k J_k$, où les λ_k sont entiers, se changera donc en $\sum \mu_k J_k + H$ où les μ_k sont des entiers et où H est une constante. Cela posé considérons q points singuliers M_1, M_2, ..., M_q. Imaginons que, quand on tourne autour de M_1, une certaine combinaison

$$\sum \lambda_{1k} J_k$$

se change en $\sum \mu_{1k} J_k + H_1$; et que plus généralement, quand on tourne autour de M_i, une certaine combinaison $\sum \lambda_{ik} J_k$ se change en

$$\sum \mu_{ik} J_k + H_i.$$

Les λ_{ik} et les μ_{ik} sont des coefficients entiers, les H_i sont des constantes.

Soit d'ailleurs K_i un contour à deux dimensions défini de la façon suivante :

Soit C_i un contour à une dimension; pour les valeurs initiales $(1, 0, 0, 1)$ des quatre variables, il est choisi dans le plan $(x = 1)$ de façon que la période correspondante de l'intégrale A soit $\sum \lambda_{ik} A_k$. Supposons ensuite que les variables α, β, γ, ε tournent au point singulier M_i en partant des valeurs initiales $(1, 0, 0, 1)$ pour revenir aux mêmes

valeurs finales, et que le cycle C_i varie avec elles d'une manière continue; il engendrera le cycle à deux dimensions K_i.

Nous pouvons supposer que $J_1, J_2, \ldots, J_{2p}$ (qui ne sont définies jusqu'ici qu'à une constante près) s'annulent pour les valeurs initiales. Alors H_i sera l'intégrale double prise le long du contour K_i.

Soient maintenant

$$\nu_1, \quad \nu_2, \quad \ldots, \quad \nu_q$$

q coefficients entiers, choisis de telle sorte que

$$(11) \quad \sum \nu_i(\lambda_{i1} - \mu_{i1}) = \sum \nu_i(\lambda_{i2} - \mu_{i2}) = \ldots = \sum \nu_i(\lambda_{i2p} - \mu_{i2p}) = 0.$$

Alors, l'expression

$$\sum \nu_i H_i$$

représentera une des *périodes de l'intégrale double;* ce sera la valeur de cette intégrale double, prise le long du cycle *fermé* à deux dimensions

$$\sum \nu_i K_i.$$

Je dis, en effet, que ce cycle est fermé. En effet le cycle K_i n'est pas fermé, mais il admet pour frontière, d'une part, le cycle C_i dans sa position initiale, c'est-à-dire

$$C_i = \sum \lambda_{ik} k_k;$$

d'autre part, ce même cycle dans sa position finale, c'est-à-dire

$$C_i = \sum \mu_{ik} k_k,$$

de sorte que sa frontière complète sera

$$\sum (\lambda_{ik} - \mu_{ik}) k_k.$$

Donc la frontière complète du cycle $\sum \nu_i K_i$ sera

$$\sum\sum \nu_i(\lambda_{ik} - \mu_{ik}) k_k$$

et elle se réduira à rien en vertu des relations (11).

C. Q. F. D.

Supposons, d'autre part, que nous changions l'origine, je veux dire qu'au lieu de faire varier α, β, γ, ε depuis les valeurs initiales (1, 0, 0, 1) jusqu'aux mêmes valeurs finales nous fassions varier α, β, γ, ε depuis d'autres valeurs initiales (α_0, β_0, γ_0, ε_0) auxquelles nous les ferons finalement revenir. La définition des cycles K_i se trouvera modifiée; nous n'aurons plus le droit de considérer J_k comme nul à l'origine et l'intégrale double prise le long du cycle K_i ne sera plus H_i, mais

$$\sum (\mu_{ik} - \lambda_{ik}) J_k + H_i.$$

Elle dépendra donc du choix de l'origine (α_0, β_0, γ_0, ε_0). Considérons, au contraire, l'intégrale double prise le long du cycle $\sum \nu_i K_i$; elle sera

$$\sum\sum \nu_i(\mu_{ik} - \lambda_{ik}) J_k + \sum \nu_i H_i,$$

expression qui se réduira à $\sum \nu_i H_i$ en vertu des relations (11). Elle sera donc indépendante du choix de l'origine.

§ 3. — Lacets rectilignes.

M. Picard a démontré que, par une transformation birationnelle convenable, une surface quelconque peut être ramenée à une surface *normale*, c'est-à-dire à une surface n'ayant d'autres singularités que des courbes formées par l'intersection de deux nappes sans point singulier, ou des points triples formés par l'intersection de trois nappes sans point singulier. Néanmoins la courbe double pourra présenter des *pinch-points*, c'est-à-dire des points où les deux nappes se touchent,

de telle façon que l'intersection de la surface par un plan quelconque passant par ce point présente non plus un point double à tangentes séparées, mais un point de rebroussement ordinaire.

Dans ce qui va suivre, nous supposerons donc en général que la surface

$$(1) \qquad F(x, y, z) = 0$$

est normale; cependant, dans certains cas, nous serons amenés à considérer des surfaces qui, outre les singularités des surfaces normales, présentent des points coniques isolés; nous supposerons qu'en ces points coniques le cône des tangentes est un cône du deuxième degré ne se décomposant pas en deux plans.

Nous avons envisagé dans le paragraphe précédent les quatre variables homogènes α, β, γ, ε et nous avons considéré en particulier le cas où ces variables prenaient des valeurs correspondant à un *point singulier;* et nous entendions par là des valeurs telles que le genre de la section de la surface (1) avec le plan

$$(3\ bis) \qquad \alpha x + \beta y + \gamma z = \varepsilon,$$

que le genre, dis-je, s'abaisse d'une ou plusieurs unités.

C'est ce qui arrivera :

1° Si le plan (3 *bis*) est tangent à la surface (1);

2° Si la surface (1) admet des points coniques, et si le plan (3 *bis*) passe par un de ces points coniques.

Je ne reviendrai pas sur la discussion par laquelle M. Picard a démontré que ces deux cas sont les seuls. Pour une surface normale, on n'a à considérer que le premier, et alors les points singuliers seront définis par l'équation

$$(2) \qquad \Phi(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon) = 0$$

qui est l'équation de la surface (1) en coordonnées tangentielles homogènes ou, si l'on aime mieux, l'équation de la dualistique de la surface (1).

On est ainsi amené à se préoccuper des singularités *tangentielles* de la surface (1). Mais, par un raisonnement tout à fait pareil à celui

de M. Picard, on verrait que l'on peut toujours supposer que la surface (2), dualistique de (1), est une surface normale.

Nous supposerons donc en général dans ce qui va suivre que les deux surfaces sont toutes deux normales, de sorte que les seules singularités tangentielles de la surface (1) seront :

1° Des plans tangents doubles en nombre simplement infini;

2° Des plans tangents triples en nombre fini;

3° Des plans tangents d'*inflexion* correspondant au pinch-points.

Considérons d'abord un point singulier M_i correspondant à un plan tangent simple ordinaire. Soient $k_1, k_2, \ldots, k_{2p}$ les $2p$ cycles fondamentaux de la courbe algébrique, intersection de (1) et de (3 *bis*); supposons que le point analytique $(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon)$ parte d'une position initiale quelconque que j'appellerai o, et qui correspondra par exemple à (0, 1, 0, 0), c'est-à-dire au plan $y = 0$; que ce point analytique tourne autour du point singulier M_i et revienne enfin en o; que seront devenus les $2p$ cycles fondamentaux?

Il résulte d'un raisonnement de M. Picard (*Théorie des fonctions algébriques*, t. I, p. 96), que, si l'on a choisi convenablement les $2p$ cycles fondamentaux

$$k_1, \quad k_2, \quad k_3, \quad \ldots, \quad k_{2p},$$

ils se changeront en

$$k_1, \quad k_2 + k_1, \quad k_3, \quad \ldots, \quad k_{2p}.$$

Il va sans dire que le choix des cycles fondamentaux qui permet d'énoncer le résultat sous cette forme simple n'est pas le même pour les différents points singuliers M_i.

Lorsque le point analytique $(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon)$ vient en M_i, le plan (3 *bis*) devient tangent à la surface (1), coupe cette surface suivant une courbe qui n'est plus que de genre $p - 1$ et qui par conséquent n'a plus que $2p - 2$ cycles fondamentaux; ces cycles sont

$$k_3, \quad k_4, \quad \ldots, \quad k_{2p}.$$

Considérons alors le cycle

$$k = \lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2 + \ldots + \lambda_{2p} k_{2p},$$

les λ étant des coefficients entiers; quand le point analytique $(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon)$ partant de O, reviendra en O après avoir tourné autour de M_i, en décrivant le chemin fermé C, le cycle à une dimension k engendrera un cycle à deux dimensions K; reprenons l'intégrale J du paragraphe précédent et prenons cette intégrale double le long de K. Le chemin C peut être remplacé par un *lacet*, c'est-à-dire par un chemin allant d'abord de O en N_i, point infiniment voisin de M_i le long de la ligne L_i, allant ensuite de N_i en N_i en décrivant autour de M_i le contour infiniment petit C'_i et revenant enfin de N_i en O par la ligne L_i.

Je remarque d'abord que l'intégrale J correspondant au contour infiniment petit C'_i est infiniment petite. En effet, cette intégrale peut s'écrire, comme nous l'avons vu au paragraphe précédent,

$$J = \int\int \frac{P\,dx\,dy}{F'_z} = \int\int \frac{P\,dy\,dz}{F'_x} = \int\int \frac{P\,dz\,dx}{F'_y}.$$

Les trois dénominateurs F'_x, F'_y, F'_z ne sont pas nuls à la fois, si le point singulier n'est pas un point conique; de sorte que nous pouvons toujours supposer que la fonction sous le signe $\int\int$ reste finie; et le contour d'intégration est infiniment petit.

Nous excluons ainsi le cas où le point singulier serait un point conique et aussi celui où P *deviendrait précisément infini au point singulier* M_i.

Mais le premier cas ne se présentera pas si la surface (1) est normale, et si l'autre se présentait, c'est-à-dire si le plan tangent $\alpha x + \beta y + \gamma z = \varepsilon$ correspondant au point M_i touchait la surface (1) en un point où P serait infini, il suffirait de remplacer ce plan par un plan tangent infiniment voisin pour que la difficulté ne se présentât plus.

Il reste donc

$$(3) \qquad J = \int\int + \int\int_{L_i},$$

la première intégrale étant prise en parcourant la ligne L_i dans le sens direct, et la seconde en parcourant cette même ligne dans le sens inverse, mais après que le cycle k_2 se serait changé dans le cycle

$k_2 + k_1$ et le cycle k dans le cycle

$$k + \lambda_2 k_1.$$

On a donc simplement

$$J = -\lambda_2 \int\int_{L_i},$$

l'intégrale étant prise depuis O jusqu'à M_i en suivant la ligne L_i et en remplaçant le cycle à une dimension k par le cycle k_1. Nous aurons donc

$$(4) \qquad J = -\lambda_2 j(L_i),$$

où

$$j(L_i) = \int_0^{M_i} (A\,d\alpha + B\,d\beta + C\,d\gamma - E\,d\varepsilon),$$

l'intégrale étant prise le long de la ligne L_i; les intégrales A, B, C, E ont le même sens que dans le paragraphe précédent; elles sont supposées prises le long du cycle k_1 : le cycle k_1 est choisi parce que c'est celui qui s'évanouit au point singulier M_i; c'est, pour prendre le langage du Mémoire cité (*Journal de Liouville*, 5e série, t. VIII, 1902, p. 191), le cycle *évanouissant* relatif à M_i.

Les périodes de l'intégrale double J sont donc des combinaisons linéaires à coefficients entiers des intégrales $j(L_i)$. D'autre part, quand la ligne L_i allant de O en M_i se déforme d'une manière continue en même temps que se déplace le point M_i et de telle façon qu'elle ne passe jamais par aucun point singulier, son extrémité M_i exceptée; dans ces conditions, dis-je, l'expression $j(L_i)$ est une constante.

Si le point M_i correspond à un plan tangent double ou triple, il y aura deux ou trois cycles évanouissants correspondant aux deux ou trois points de contact de ce plan avec la surface; l'intégrale $j(L_i)$ sera donc susceptible de deux ou trois valeurs entre lesquelles il faudra distinguer. Il en sera de même si le point M_i correspond à un plan tangent d'inflexion; seulement les deux cycles évanouissants correspondront alors à un même point de contact. A part cela, aucune différence avec ce qui se passe pour un plan tangent ordinaire.

Supposons maintenant que l'on prenne $\alpha = \gamma = 0$, $\beta = 1$, de telle sorte que le plan (3 *bis*) se réduise au plan $y = \varepsilon$; on étudie ainsi les sections successives de la surface par des plans parallèles à $y = 0$; c'est le procédé qu'a employé M. Picard dans son Ouvrage et j'ai suivi son exemple dans le Mémoire cité.

Marquons dans le plan des y l'origine O correspondant au plan initial $y = 0$, et les points singuliers $M_1, M_2, \ldots, M_q$ correspondant aux plans $y = y_1$, $y = y_2$, $\ldots$, $y = y_q$ qui touchent la surface (1). Joignons OM_1, OM_2, $\ldots$, OM_q par des droites. Je considère une ligne L_i dont tous les points satisfont aux conditions $\alpha = \gamma = 0$, $\beta = 1$; dans ce cas ε est seul variable et, comme notre plan (3 *bis*) a précisément pour équation $y = \varepsilon$, nous pouvons représenter la ligne L_i sur le plan des y. Je dis que l'intégrale $j(L_i)$ sera une combinaison linéaire à coefficients entiers des intégrales

$$j(OM_1), \quad j(OM_2), \quad \ldots, \quad j(OM_q)$$

correspondant aux droites OM_i.

En effet, prolongeons les droites OM_1, OM_2, $\ldots$, OM_q jusqu'à l'infini; nous pourrons considérer les prolongements $M_i\infty$ des droites OM_i comme des coupures.

Cela posé, la ligne L_i, tracée dans le plan des y, ira du point O au point M_i en coupant un certain nombre de coupures; supposons pour fixer les idées qu'elle traverse successivement les coupures $M_1\infty$ et $M_2\infty$; il faut en outre préciser le sens dans lequel elle les traverse; je supposerai, par exemple, que ce soit dans le sens direct, c'est-à-dire dans le même sens qu'un mobile qui décrirait un cercle de rayon très grand dans le sens opposé à celui des aiguilles d'une montre. Alors un mobile qui décrirait le *lacet* tout entier, c'est-à-dire L_i, puis le contour infiniment petit C'_i, puis de nouveau L_i en sens contraire, coupera successivement les coupures $M_1\infty$, $M_2\infty$, $M_i\infty$ dans le sens direct, puis $M_2\infty$ et $M_1\infty$ dans le sens rétrograde. Le lacet primitif pourra donc être remplacé par cinq lacets rectilignes consécutifs, enveloppant respectivement les points singuliers M_1, M_2, M_i, M_2, M_1 et décrits les trois premiers dans le sens direct, les deux autres dans le sens rétrograde. Les intégrales correspondant à ces cinq lacets seront respecti-

vement égales à

$$j(OM_1)\quad j(OM_2),\quad j(OM_i),\quad j(OM_2),\quad j(OM_1)$$

multipliées par des coefficients entiers convenables. La détermination de ces coefficients, dont quelques-uns d'ailleurs peuvent être nuls, dépend de la façon dont se transforment les cycles fondamentaux k_1, k_2, ..., k_{2p} quand on tourne autour des points singuliers.

Nous verrons plus loin comment on peut faire une réduction analogue, dans le cas où la ligne L_i n'est pas telle que tous ses points satisfassent aux conditions $\alpha = \gamma = 0$, $\beta = 1$. Mais pour le moment nous remarquerons que, dans le Mémoire cité du *Journal de Liouville*, j'ai démontré au paragraphe **3** que, sous certaines hypothèses, toutes les périodes de l'intégrale double J sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers des expressions $j(OM_i)$; les points M_i correspondent en effet aux points A_i du Mémoire cité et les chemins rectilignes OM_i aux coupures OA_i.

Les combinaisons linéaires qui correspondent aux périodes de l'intégrale double sont les suivantes. Soit k'_i le cycle évanouissant correspondant à OM_i; toute combinaison

$$\sum \nu_i j(OM_i)$$

où les ν_i sont des entiers tels que

$$\sum \nu_i k'_i = 0 \tag{5}$$

correspondra à une période.

Dans ce même Mémoire, à la fin du même paragraphe, j'ai montré que quelques-unes de ces combinaisons sont nulles; ce sont celles qui sont engendrées de la façon suivante : je suppose qu'on décrive successivement les différents lacets

$$OM_1,\quad OM_2,\quad \ldots,\quad OM_q$$

dans le sens direct et dans l'ordre où ces différents segments rectilignes se succèdent autour de O; de telle façon que le contour total

se compose d'une ligne fermée qui enveloppe tous les points singuliers M_i sans couper aucun des segments OM_i. On part d'ailleurs du point initial avec un cycle à une dimension quelconque k, et l'on revient, par conséquent, au point final avec ce même cycle. La combinaison correspondant à ce chemin sera nulle.

Mais il est nécessaire de revenir sur ce point; car, dans le Mémoire cité, j'ai supposé entre autres hypothèses, qu'aucun des points singuliers A_i n'est rejeté à l'infini. Or, si l'on considère une surface

(1) $$F(x, y, z) = 0$$

qui soit la plus générale de son degré; puis la section de cette surface par le plan (3 *bis*) $y = \varepsilon$ qui est la courbe plane C,

$$F(x, \varepsilon, z) = 0.$$

On peut dire que pour $\varepsilon = \infty$ cette courbe présente des singularités, et l'on pourrait, par conséquent, se demander si les résultats ne s'en trouvent pas modifiés.

Or le contour que nous venons de définir peut être remplacé par le suivant : la variable y décrit dans son plan un cercle de rayon très grand; en même temps la surface de Riemann correspondant à la courbe plane C se déforme d'une manière continue; nous avons sur cette surface un cycle fermé qui varie également d'une manière continue et revient à sa position initiale en même temps que la variable y; les variables x et z sont assujetties à rester sur ce cycle.

Supposons d'abord que P soit un polynome entier de degré $m - 3$ en x, y, z, de telle façon que l'intégrale simple

(6) $$\int \frac{P\, dx}{F'_z}$$

soit une intégrale abélienne de première espèce.

Posons

$$x = uy, \qquad x = vy.$$

Nous voyons que P deviendra un polynome d'ordre $m - 3$ et F'_z un polynome d'ordre $m - 1$ en y de telle sorte que $\frac{P}{F'_z}$ pourra se déve-

lopper suivant les puissances décroissantes de y et que le premier terme sera un terme en $\frac{1}{y^2}$. Le coefficient de ce terme sera d'ailleurs

$$\frac{P_0(u, 1, v)}{F'_{0v}(u, 1, v)}$$

en désignant par $P_0(x, y, z)$, $F_0(x, y, z)$, $F'_{0v}(x, y, z)$ les termes du degré le plus élevé de $P(x, y, z)$, $F(x, y, z)$, $F'_z(x, y, z)$. J'écrirai simplement $\frac{P_0}{F'_0}$ en supprimant l'indice v.

Nous avons d'autre part

$$dx\,dy = y\,du\,dy,$$

d'où

$$\int\int \frac{P\,dx\,dy}{F'_z} = \int\int du\,dy\left(\frac{1}{y}\frac{P_0}{F'_0} + \ldots\right).$$

Le premier terme est seul sensible; il reste donc

$$\int\int \frac{dy}{y}\frac{P_0\,du}{F'_0} = 2i\pi\int\frac{P_0\,du}{F'_0}, \tag{7}$$

$\int \frac{P_0\,du}{F'_0}$ est une intégrale abélienne relative à la courbe algébrique

$$F_0(u, 1, v) = 0. \tag{8}$$

Ainsi, notre période, qui est égale à l'expression (7), n'est pas nulle dans le cas qui nous occupe, mais elle a le caractère d'une période polaire et non d'une période cyclique.

Il en sera encore de même si P est de la forme $\frac{Q}{x-a}$, Q étant un polynome d'ordre $m-2$, c'est-à-dire si l'intégrale (6) a la forme d'une intégrale abélienne de troisième espèce ayant tous ses infinis à distance finie. Nous laisserons de côté, pour le moment, les cas où cette intégrale abélienne (6) aurait des infinis à distance infinie.

§ 4. — Théorie générale.

J'ai cité plusieurs fois le travail que j'ai fait insérer dans le *Journal de Liouville*, comme 4e Complément à l'*Analysis situs;* je crois devoir non seulement en rappeler ici les résultats, mais les présenter sous une forme nouvelle, les différences portant non seulement sur le mode d'exposition, mais sur une convention fondamentale que je crois préférable de modifier. Quand on s'occupe des propriétés d'une surface algébrique au point de vue de l'*Analysis situs*, on s'aperçoit promptement que la question peut avoir un sens très différent selon la convention que l'on adoptera au sujet des points à l'infini. A l'égard d'une surface $F(x, y, z) = 0$, nous pouvons envisager plusieurs sortes de points à l'infini; nous avons d'abord ceux où x, y et z sont infinis à la fois, et ceux où deux seulement de ces trois coordonnées sont infinies. Je néglige ceux où deux coordonnées sont finies et une infinie; ils n'existeraient en effet que, si la surface étant de degré m, par exemple, le polynome F ne contenait pas de terme en z^m, et ce cas, évidemment, ne se présentera pas en général.

On peut ne pas considérer comme distincts deux points x_1, y_1, z_1 et x_2, y_2, z_2 toutes les fois que les six coordonnées de ces deux points sont infinies, et alors même que l'on n'aurait pas $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$; on regarderait, au contraire, ces deux points comme distincts si, par exemple, x_1, y_1, x_2, y_2 étaient infinis, z_1 et z_2 finis et z_1 différent de z_2. C'est le premier point de vue.

Au second point de vue, on regardera deux points à l'infini comme distincts toutes les fois que l'on n'aura pas

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

Si, au contraire, z_1 et z_2 sont finis, le rapport $\frac{x_1}{y_1}$ sera égal au rapport $\frac{x_2}{y_2}$ puisqu'on l'obtiendra en égalant à zéro l'ensemble des termes de F qui sont de degré m en x et y; d'autre part, les rapports $\frac{z_1}{y_1}$ et $\frac{z_2}{y_2}$ seront

égaux entre eux et égaux à zéro, et les deux points devront être regardés comme non distincts, contrairement au premier point de vue, alors même que z_1 ne serait pas égal à z_2.

Dans le Mémoire cité, je m'étais placé au premier point de vue, et c'est également ce que M. Picard avait fait le plus souvent. Ce premier point de vue peut être le plus avantageux dans certains cas, mais il a l'inconvénient de n'être pas *projectif*, ce qui m'empêcherait d'appliquer les principes des deux paragraphes précédents et j'adopterai le second.

Si nous considérons y comme une constante, l'équation

$$F(x, y, z) = 0$$

définira une courbe algébrique et par conséquent une surface de Riemann que j'appelle $S(y)$. J'observe d'abord que deux surfaces de Riemann $S(y_1)$ et $S(y_2)$ ont un certain nombre de points communs.

Soit, en effet, $F_m(x, 0, z)$ l'ensemble des termes de F qui sont d'ordre m en x et en z; l'équation $F_m(x, 0, z) = 0$ définira m valeurs du rapport $\frac{x}{z}$, qui correspondront aux directions asymptotiques de la courbe algébrique

$$F(x, y_1, z) = 0,$$

directions qui seront d'ailleurs les mêmes que celles de la courbe $F(x, y_2, z) = 0$; à ces m directions asymptotiques correspondront m points à l'infini sur la surface $S(y_1)$ et de même m points à l'infini sur la surface $S(y_2)$. D'après la convention que nous venons de faire, *les m points à l'infini de* $S(y_1)$ *ne différeront pas de ceux de* $S(y_2)$.

Pour $y = \infty$, nous avons la surface de Riemann $S(\infty)$ dont les différents points correspondent aux différents systèmes de valeurs des rapports de x, y et z satisfaisant à l'équation

$$F_m(x, y, z) = 0,$$

où F_m est l'ensemble des termes de F de degré m en x, y et z; ou, en d'autres termes, aux différents points à l'infini de la surface $F = 0$. Parmi les points de la surface $S(\infty)$ nous distinguerons ceux qui sont

donnés par

$$F_m(x, 0, z) = 0,$$

et qui lui sont communs avec les autres surfaces $S(y_1)$, $S(y_2)$, ...

Pour certaines valeurs de y, le genre de la surface $S(y)$ s'abaisse, ce sont celles qui correspondent à un plan $y =$ const. tangent à la surface $F = 0$. Soient

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \ldots, \quad \varepsilon_k$$

ces valeurs singulières de y.

Il faut maintenant que je définisse ce que j'appelle la *projection* d'une surface $S(y_1)$ sur une autre surface $S(y_2)$ *quand je suppose que* y_1 et y_2 *ont même argument*. A chaque point de $S(y_1)$ je ferai correspondre un point de $S(y_2)$ et inversement, et cela d'une façon biunivoque, et je dirai que l'un de ces points est la projection de l'autre. Je m'arrangerai de façon que deux points infiniment voisins aient pour projections deux points infiniment voisins et, par conséquent, qu'une courbe continue se projette suivant une courbe continue et une courbe fermée suivant une courbe fermée. De plus je m'arrangerai de façon que les m points à l'infini qui sont communs aux deux surfaces soient leur propre projection. Il est clair que toutes ces conditions peuvent être remplies.

Imposons-nous maintenant une condition de plus. Soient y_1, y_2, y'_1, y'_2 quatre valeurs de y; y_1 et y_2 d'une part, y'_1 et y'_2 d'autre part ont même argument; d'ailleurs y_1 diffère très peu de y'_1 et y_2 de y'_2. Je considérerai alors deux points M_1 et M'_1 des deux surfaces $S(y_1)$ et $S(y'_1)$ et leurs projections M_2 et M'_2 sur $S(y_2)$ et $S(y'_2)$, et *je supposerai que, si* M_1 *et* M'_1 *sont infiniment voisins, il en est de même de* M_2 *et* M'_2.

Cette condition ne peut pas toujours être remplie. Traçons dans le plan des y le quadrilatère rectiligne $y_1 y'_1 y'_2 y_2$, dont deux côtés $y_1 y'_1$ et $y'_2 y_2$ sont infiniment petits. Si à l'intérieur de ce quadrilatère se trouve l'un des points singuliers ε_1, ε_2, ..., ε_k, la condition ne pourra être remplie. Nous joindrons donc dans le plan des y l'origine O aux différents points singuliers ε_i: les droites ainsi tracées partageront le plan en secteurs et la condition devra être remplie à l'intérieur de

chacun des secteurs. Si maintenant y_1 et y'_1, et, par conséquent, y_2 et y'_2 n'appartiennent pas à un même secteur la condition pourra ne pas être remplie; elle le sera si $|y_1|$ et $|y_2|$ (et par conséquent $|y'_1|$ et $|y'_2|$) sont tous deux plus grands ou tous deux plus petits que $|\varepsilon_i|$ (ε_i étant le point singulier qui se trouve entre les deux rayons infiniment voisins Oy_2y_1 et $Oy'_2y'_1$); elle ne le sera pas dans le cas contraire.

Cela posé, envisageons un cycle fermé à deux dimensions quelconque de la variété V à quatre dimensions dont les différents points réels correspondent aux différents points réels et imaginaires *regardés comme distincts* de la surface $F = 0$. (Pour expliquer ce qu'on entend par regardés comme distincts, je rappellerai la convention que nous venons de faire au sujet des points à l'infini et, d'autre part, que si la surface a une courbe double, aux deux nappes qui se coupent en un point de cette courbe doivent correspondre deux points distincts de V.) Soit K ce cycle fermé à deux dimensions.

Considérons un point de ce cycle, et marquons sur le plan des y la valeur correspondante de y: à chaque point de K correspondra donc ainsi un point du plan des y, et inversement à certains points de ce plan pourront correspondre un ou plusieurs points du plan de K. Nous sommes ainsi conduits à partager le plan des y en régions diverses, les régions R_0 aux points desquelles ne correspond aucun point y, les régions R_1 aux points desquelles correspond un seul point y, les régions R_2 aux points desquelles correspondent deux points y, etc.

Cela suppose toutefois que le cycle K ne passe par aucun des m points à l'infini communs à toutes les surfaces $S(y)$, sans quoi la valeur correspondante de y serait indéterminée. S'il en était autrement, on déformerait légèrement le cycle K de façon qu'il cesse de passer par ces points.

Ce n'est pas tout, ce cycle K est tel que, dans le voisinage de chacun de ces points, les parties réelles et imaginaires de x, y, z peuvent s'exprimer en fonctions holomorphes de deux paramètres u et v; si nous considérons donc deux domaines à deux dimensions faisant partie de ce cycle, et de telle façon que dans le premier tout s'exprime en fonction de u et v, et dans le second en fonction de deux autres para-

mètres u' et v'; si ces deux domaines ont une partie commune, le signe du déterminant fonctionnel de u et v par rapport à u' et v' sera constant dans toute cette partie commune.

Si nous supposons, comme il convient, que le cycle K *est bilatère,* nous pourrons supposer sans restreindre la généralité que ces paramètres u, v, u', v' ont été choisis dans chaque domaine de telle façon que ce déterminant fonctionnel soit toujours positif.

Soit alors Δ le déterminant fonctionnel de u et v par rapport à y_1 et y_2, en désignant pour un instant par y_1 et y_2 les parties réelle et imaginaire de y. Le signe de ce déterminant ne changera pas, d'après la convention que nous venons de faire, quand on passera de u et v à deux autres paramètres u' et v'. Soit alors un point de l'une des régions R_n dont nous venons de parler: à ce point correspondront n points du cycle K; je suppose qu'il y en ait p pour lesquels Δ soit positif et $n-p$ pour lesquels Δ soit négatif. Eh bien, *l'excès* $2p-n$ *sera constant pour tous les points du plan des* y *et pour toutes les régions* R_0, R_1, ...

D'où l'on peut conclure que le nombre n relatif aux diverses régions R_n est constamment de même parité. S'il y a des régions R_0, l'excès $2p-n$ est constamment nul.

Nous examinerons d'abord le cas où le point $y=0$ et le point $y=\infty$ appartiennent l'un et l'autre à une région R_0. Coupons notre cycle K par la variété

$$\arg y = \text{const}.$$

Cette variété sera représentée sur le plan des y par une demi-droite allant de l'origine à l'infini. Nous remarquerons que cette demi-droite, partant de l'intérieur d'une région R_0, traverse des régions R_n $(n>0)$ et aboutit finalement à l'intérieur d'une région R_0. Si donc nous envisageons les points qui appartiennent à la fois à cette variété et au cycle K, le module de y variera pour ces points entre un certain minimum et un certain maximum. *Il en résulte que l'intersection de cette variété et de* K *sera un cycle fermé à une dimension* que j'appelle (K, ω), ω étant l'argument constant de y.

Tous les points de (K, ω) appartiennent à une surface de Riemann $S(y)$, où $y=\rho e^{i\omega}$ a un argument constant ω; nous pouvons donc les *projeter* sur l'une quelconque d'entre elles $S(\rho_0 e^{i\omega})$ et, par

exemple, sur S(o); j'appellerai (K, ω, o) la projection du cycle (K, ω) sur S(o). Comparons maintenant (K, ω, o) à (K, ω', o): si ω diffère très peu de ω', il résulte des conventions faites plus haut que (K, ω, o) différera très peu de (K, ω', o) *à moins que l'argument de l'un des points singuliers* ε_k *ne soit compris entre* ω *et* ω'. Si nous adoptons la notion de l'homologie, nous aurons donc, sur la surface S(o), l'homologie

$$(K, \omega, o) \sim (K, \omega', o)$$

et elle subsistera quand même ω et ω' différeront d'une quantité finie (puisque cette homologie signifie précisément que l'on peut passer d'un cycle à l'autre par déformation continue): elle subsistera, dis-je, à moins que l'argument de l'un des points singuliers ε_k ne soit compris entre ω et ω'; ou en d'autres termes toutes les fois que les demi-droites correspondant aux arguments ω et ω' appartiennent à un même secteur (si l'on suppose le plan divisé en secteurs par les droites $O\varepsilon_k$ et leurs prolongements).

Comparons maintenant les cycles (K, ω, o), (K, ω', o) en admettant qu'il y ait un point ε_k dont l'argument soit compris entre ω et ω'. Projetons les deux cycles (K, ω) et (K, ω') non plus sur S(o), mais sur les deux surfaces de Riemann $S(\rho_0 e^{i\omega})$ et $S(\rho_0 e^{i\omega'})$ qui diffèrent très peu l'une de l'autre; soient H et H' ces deux projections; ce sont deux cycles appartenant respectivement aux deux surfaces $S(\rho_0 e^{i\omega})$ et $S(\rho_0 e^{i\omega'})$. Soit H'' un cycle de la première surface qui diffère infiniment peu du cycle H' lequel appartient à la deuxième surface, infiniment peu différente de la première. Quand ρ_0 décroîtra d'une manière continue de ∞ à o, H et H' et par conséquent H'' et H − H'' varieront d'une manière continue. Pour $\rho_0 = o$, nous aurons

$$(K, \omega, o) \sim (K, \omega', o) + H - H''.$$

Faisons maintenant $\rho_0 = |\varepsilon_k|$; je dis que pour cette valeur de ρ_0 les cycles H, H' et H'' différeront infiniment peu l'un de l'autre. En effet, dans le cycle (K, ω) nous distinguerons deux parties, que nous appellerons H et H_1; la première comprendra les points tels que $|y| < |\varepsilon_k|$, et la seconde les points tels que $|y| > |\varepsilon_k|$. De même dans le cycle (L, ω') nous distinguerons deux parties H' et H'_1. Alors H différera

infiniment peu de H′ et H_1 de H'_1. Projetons H et H′ sur les surfaces $S(\rho_0 e^{i\omega})$, $S(\rho_0 e^{i\omega'})$ où $\rho_0 = |\varepsilon_k| - \delta$, δ étant infiniment petit et positif; les projections seront infiniment peu différentes. Si nous considérons en effet deux points très peu différents de H et H′ pour lesquels y a respectivement pour valeur $\rho e^{i\omega}$, $\rho e^{i\omega'}$, $(\rho < |\varepsilon_k|)$ et leurs projections pour lesquelles y a pour module $|\varepsilon_k| - \delta$, le quadrilatère rectiligne formé par ces quatre valeurs de y ne contient pas ε_k à son intérieur.

Donc les projections de ces deux points différeront très peu d'après les conventions faites plus haut; les projections de H et de H sur les surfaces $\rho_0 = |\varepsilon_k| - \delta$ et par conséquent sur les surfaces infiniment voisines $\rho_0 = |\varepsilon_k|$ différeront donc très peu. On le démontrerait de même pour les projections de H_1 et de H'_1.

Donc, pour $\rho_0 = |\varepsilon_k|$, H et H′ diffèrent très peu; le cycle H − H″ est infiniment petit, c'est un cycle évanouissant relatif au point singulier ε_k.

Nous arrivons donc à la conclusion suivante :

Si ω et ω' n'appartiennent pas à un même secteur, mais à deux secteurs continus séparés par la droite $O\varepsilon_k$, les cycles

$$(K, \omega, o), \quad (K, \omega', o)$$

ne sont plus homologues en général, mais leur différence est homologue à un cycle évanouissant relatif au point singulier ε_k.

Pour aller plus loin, précisons davantage la notion de *projection*. Nous joignons l'origine O par des segments de droite $O\varepsilon_k$ aux différents points singuliers ε_k et nous regardons ces segments comme des coupures. Tant que y ne franchira pas ces coupures la surface $S(y)$ restera homéomorphe à elle-même; nous pouvons donc établir entre les points des deux surfaces $S(y_1)$, $S(y_2)$ quelconques une correspondance biunivoque telle que, lorsqu'un point M variera d'une manière continue sur une surface $S(y_1)$ et qu'en même temps y variera d'une façon continue mais *sans franchir les coupures*, le point M′ de $S(y)$ qui correspond à M variera d'une façon continue. Seulement, si l'on a deux points y_1 et y_2 infiniment voisins l'un de l'autre, mais de part et d'autre d'une coupure, et deux points M et M

se correspondant sur $S(y_1)$ et $S(y_2)$, ces deux points ne seront pas, en général, infiniment voisins. C'est cette correspondance qui servira à définir la *projection* en se restreignant alors aux cas où y_1 et y_2 ont même argument.

Considérons maintenant une coupure $O\varepsilon_k$ et le point singulier correspondant ε_k. Soient y_1 et y_2, y'_1 et y'_2 deux couples de points; je suppose que y_1 et y_2 soient infiniment voisins et de part et d'autre de la coupure et qu'il en soit de même pour le second couple. Soit M_1 un point de $S(y_1)$ et M_2 un point de $S(y_2)$, infiniment voisin de M. D'après ce que nous venons de voir, M_1 et M_2 ne peuvent être correspondants. Soit maintenant M'_1 le point de $S(y'_1)$ correspondant de M_1, et M'_2 le point de $S(y'_2)$ correspondant de M_2. Les deux points M'_1 et M'_2 seront infiniment voisins, il est toujours possible de le supposer. En revanche il y a une chose que nous ne pourrions supposer sans nous lancer dans de grosses difficultés. Soit η un point de la coupure; considérons la surface de Riemann correspondante, nous l'appellerons $S(\eta)$ si y a atteint η par l'une des lèvres de la coupure, et $S(\eta')$ si y a atteint η par l'autre lèvre. Les deux surfaces $S(\eta)$ et $S(\eta')$ sont identiques; mais le point de cette surface qui correspond à un point donné d'une autre surface $S(y)$ ne sera pas le même selon qu'il sera regardé comme appartenant à $S(\eta)$ ou à $S(\eta')$. Il en résulte qu'il y a une correspondance entre les points de $S(\eta)$ et ceux de $S(\eta')$; on peut se demander si cette correspondance est réciproque; mais on voit bientôt qu'il n'est pas permis en général de supposer cette réciprocité.

Différents cas sont à distinguer; suivant la nature du point singulier ε_k, le plus simple est celui où le plan $y = \varepsilon_k$ est tangent à la surface $F = 0$ et la coupe suivant une courbe présentant un point double ordinaire à tangentes séparées. Que pouvons-nous dire alors de la correspondance entre les points de $S(\eta)$ et de $S(\eta')$; soit p le genre de la surface $S(\eta)$; soient $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_{2p}$ un système de cycles fondamentaux de $S(\eta)$; soient $\Omega'_1, \Omega'_2, \ldots, \Omega'_{2p}$ les cycles correspondants de $S(\eta')$; on verrait qu'on aurait pu choisir les cycles fondamentaux de telle façon que l'on ait

$$\Omega'_1 = \Omega_1 + \Omega_2, \qquad \Omega_2 = \Omega'_2, \qquad \Omega_3 = \Omega'_3, \qquad \ldots.$$

Alors Ω_2 est un cycle *évanouissant* relatif au point singulier ε_k.

Pour nous rendre compte de la correspondance entre les points de η) et de $S(\eta')$, nous pouvons supposer que dans un espace E à six dimensions, par exemple, on construise la variété V à quatre dimensions, et qu'on se soit arrangé pour que cette variété n'ait pas de point double et que tous ses points soient à distance finie. Les points de V qui correspondent à une valeur donnée de y formeront alors une surface *fermée* à deux dimensions de l'espace E qui n'aura en général aucun point singulier et qui sera notre $S(y)$. Cependant la surface $S(\varepsilon_k)$ admettra un point conique P. Si η est très voisin de ε_k, la surface $S(\eta)$, identique à $S(\eta')$, présentera donc un *étranglement* dans le voisinage du point P. Nous pourrons tracer sur $S(\eta)$ une petite ligne fermée qui embrasse la partie la plus étroite de cet étranglement (tel le cercle de gorge sur un hyperboloïde de révolution à une nappe). Ce sera notre cycle évanouissant Ω_2; nous pourrons tracer dans le voisinage du point P une série de cycles fermés analogues sur $S(\eta)$ tels que seraient les différents parallèles sur un hyperboloïde de révolution; nous pouvons ensuite définir un point quelconque de $S(\eta)$, *au moins dans la partie étranglée voisine du point* P, par deux coordonnées ρ et ω, choisies de telle sorte que ρ soit constant tout le long de chacun de ces cycles fermés, et que ω augmente de 2π quand on fait le tour d'un de ces cycles. Nous pourrons alors admettre la loi de correspondance suivante : dans la partie non voisine du point P, ou toutes les fois que ρ ne sera pas compris entre ρ_0 et ρ_1, chaque point de $S(\eta)$ sera son propre correspondant. Si ρ est compris entre ρ_0 et ρ_1, nous ferons correspondre au point ρ, ω de $S(\eta)$ le point ρ, $\omega + \varphi(\rho)$ de $S(\eta')$; et $\varphi(\rho)$ sera une fonction continue de ρ constamment croissante, égale à o pour $\rho = \rho_0$ et à 2π pour $\rho = \rho_1$. En d'autres termes nous ferons subir à la partie étranglée comprise entre les cycles $\rho = \rho_0$ et $\rho = \rho_1$ une torsion progressivement croissante d'un cycle à l'autre, de telle façon que cette torsion, nulle pour $\rho = \rho_0$, atteigne un tour complet pour $\rho = \rho_1$, ce qui permet le raccordement avec la partie non étranglée, supposée non déformée.

A mesure que η s'éloignera de ε_k, l'étranglement sera de moins en moins prononcé et nous serons conduits à étendre la déformation à une partie de plus en plus étendue de la surface; cette loi de correspondance restera néanmoins arbitraire dans une très large mesure.

Ces conventions faites, projetons maintenant le cycle (K, ω) sur la surface $S(\eta)$ en supposant que ω soit l'argument de ε_k; nous obtiendrons deux projections différentes, selon que l'on supposera que cet argument ω a été atteint par l'une ou par l'autre lèvre de la coupure, c'est-à-dire selon que l'on projettera sur $S(\eta)$ ou sur $S(\eta')$. Soient (K, ω, η), (K, ω, η') ces deux projections. Soit M un point de (K, ω); N sa projection sur $S(\eta)$, N' sa projection sur $S(\eta')$. N et N' seront identiques si l'y du point M est plus petit en valeur absolue que ε_k. Dans le cas contraire ces deux points seront *correspondants* conformément à la loi de correspondance adoptée plus haut. La différence des deux cycles $(K, \omega, \eta) - (K, \omega, \eta')$ sera alors un cycle de $S(\eta)$ homologue à zéro, au cycle évanouissant Ω_2, ou à un de ses multiples.

L'ensemble des cycles $(K, \omega, \eta) - (K, \omega, \eta')$ quand on fait varier η depuis zéro jusqu'à ε_k engendrera une variété $\Delta(\varepsilon_k)$ à deux dimensions. Le cycle $(K, \omega, \eta) - (K, \omega, \eta')$ est toujours homologue à un multiple de Ω_2; supposons, par exemple, à Ω_2; il se réduit au point P pour $\eta = \varepsilon_k$; mais, pour $\eta = 0$, il ne se réduit pas à un point, mais à un cycle de la surface $S(0)$ qui est encore homologue à Ω_2 et que nous pourrons appeler

$$(K, \omega, 0) - (K, \omega, 0').$$

La variété $\Delta(\varepsilon_k)$, que nous pourrons appeler un *doigt* à cause de sa forme, n'est donc pas fermée, mais a pour frontière le cycle

$$(K, \omega, 0) - (K, \omega, 0').$$

Mais, jusqu'ici, nous avons supposé que Ω_2 n'est pas homologue à zéro, c'est-à-dire que le cycle infiniment petit que l'on peut tracer sur $S(\eta)$ quand η est très voisin de ε_k ne partage pas cette surface en deux régions distinctes. Mais le cas contraire peut aussi se présenter; il arrive alors que la surface $S(\varepsilon_k)$ se décompose en deux surfaces distinctes, c'est-à-dire que la courbe intersection de $F = 0$ et de $y = \varepsilon_k$ est décomposable.

Dans ce cas, le cycle $(K, \omega, \eta) - (K, \omega, \eta')$ décomposera la surface $S(\eta)$ en deux régions que nous appellerons $S_1(\eta)$ et $S_2(\eta)$. Considérons la variété à trois dimensions engendrée par $S_1(\eta)$ quand η varie de zéro à ε_k; elle sera limitée d'une part par le doigt $\Delta(\varepsilon_k)$,

par $S_1(0)$ qui est une partie de $S(0)$ et par $S_1(\varepsilon_k)$; de sorte que

$$\Delta(\varepsilon_k) \sim S_1(\varepsilon_k) - S_1(0).$$

Mais $S_1(\varepsilon_k)$ *n'est autre chose que la surface de Riemann relative à l'une des composantes de la courbe d'intersection de* $F = 0$ *et* $y = \varepsilon_k$; ce qui nous fait comprendre la signification du doigt $\Delta(\varepsilon_k)$ dans ce cas particulier.

Revenons au cas général et reportons-nous à un paragraphe précédent, nous verrons que nous y avons défini une intégrale

$$j(L_i);$$

eh bien! cette intégrale n'est autre chose que l'intégrale prise le long du doigt $\Delta(\varepsilon_k)$ lorsque la ligne L_i parcourue par le point α, β, γ, ε est telle que α et γ soient constamment nuls, β égal à 1, et que ε varie avec un argument constant de zéro à ε_k.

Un autre cas est celui où le point singulier ε_k correspond à un point conique ordinaire de la surface $F = 0$. Il arrive alors que les cycles

$$\Omega_1, \quad \Omega_2, \quad \ldots, \quad \Omega_{2p}$$

se changent en

$$\Omega_1 + 2\Omega_2, \quad \Omega_2, \quad \ldots, \quad \Omega_{2p}$$

et non plus en $\Omega_1 + \Omega_2$, Ω_2, $\ldots$, Ω_{2p}. Ce que nous avons dit de la loi de correspondance subsiste; seulement la fonction $\varphi(\rho)$, qui croît constamment depuis $\rho = \rho_0$ jusqu'à $\rho = \rho_1$, au lieu de croître de zéro à 2π, croîtra de zéro à 4π. La définition du doigt $\Delta(\varepsilon_k)$ restera la même.

Il peut arriver ensuite que le plan $y = \varepsilon_k$ soit tangent à $F = 0$ en deux points différents. Alors la surface $S(\eta)$ très voisine de $S(\varepsilon_k)$ présente deux étranglements au lieu d'un, il y a deux cycles *évanouissants* au lieu d'un, d'où résulte la circonstance suivante :

Appelons *doigt simple* et désignons par $\Delta(\varepsilon_k, \Omega)$ la variété engendrée par un cycle de $S(\eta)$ qui reste homologue à Ω quand on fait varier η de zéro à ε_k. Notre doigt défini plus haut et que nous continuerons à appeler simplement $\Delta(\varepsilon_k)$ serait dans cette notation

$$\Delta[\varepsilon_k, (K, \omega, \eta) - (K, \omega, \eta')].$$

Dans les cas examinés plus haut, il n'y avait qu'un cycle évanouissant Ω_2, le cycle $(K, \omega, \gamma_i) - (K, \omega, \gamma_i')$ était toujours homologue à un multiple de Ω_2, soit à $n\Omega_2$, de sorte qu'on avait toujours

$$\Delta(\varepsilon_k) \sim n \Delta(\varepsilon_k, \Omega_2) + \sigma(0),$$

$\sigma(0)$ désignant une partie de $S(0)$.

Ici, au contraire, nous aurons deux cycles évanouissants Ω_2, Ω_2' et deux doigts simples $\Delta(\varepsilon_k, \Omega_2)$, $\Delta(\varepsilon_k, \Omega_2')$ et l'on aura, quel que soit le cycle k,

$$\Delta(\varepsilon_k) \sim n \Delta(\rho_k, \Omega_2) + n' \Delta(\varepsilon_k, \Omega_2') + \sigma(0),$$

n et n' étant entiers, de sorte que $\Delta(\varepsilon_k)$ s'exprimera linéairement en fonction non plus d'un, mais de deux doigts simples.

Il peut arriver que l'un des cycles Ω_2 et Ω_2' qui correspondent aux deux étranglements soit homologue à zéro sur sa surface; soit, par exemple, Ω_2; dans ce cas la surface $S(\varepsilon_k)$ se décompose et le doigt simple $\Delta(\varepsilon_k, \Omega_2)$ est alors homologue à l'une des composantes de cette surface de Riemann, plus une région de $S(0)$. C'est ce que nous avons vu plus haut.

Nous examinerons un dernier cas, c'est celui où le plan $y = \varepsilon_k$ coupe $F = 0$ suivant une courbe présentant un point de rebroussement. Il arrive alors que les cycles

$$\Omega_1, \quad \Omega_2, \quad \Omega_3, \quad \ldots, \quad \Omega_{2p}$$

se changent en

$$\Omega_1 + \Omega_2, \quad -\Omega_1, \quad \Omega_3, \quad \ldots, \quad \Omega_{2p},$$

de sorte qu'il y a deux cycles évanouissants

$$\Omega_1, \quad \Omega_2$$

et par conséquent deux doigts simples $\Delta(\varepsilon_k, \Omega_1)$, $\Delta(\varepsilon_k, \Omega_2)$ dont le doigt $\Delta(\varepsilon_k)$ sera une combinaison linéaire à coefficients entiers.

§ 5. — Formation des cycles.

Cela posé, reprenons le cycle K, menons les projetantes de ses différents points et prolongeons-les jusqu'à la surface S(o). Ces projetantes engendreront une variété W à trois dimensions. Quelles sont les frontières de cette variété? Ce sera d'abord le cycle K dont chaque point est l'extrémité de l'une des projetantes; ce sera ensuite une portion $S_2(o)$ de la surface S(o); car l'autre extrémité de chaque projetante se trouve sur cette surface. Mais, ce n'est pas tout; deux projetantes issues de deux points infiniment voisins pourront ne pas rester infiniment voisines; si, par exemple, ω et ω' sont deux arguments infiniment voisins, l'un plus grand, l'autre plus petit que celui de ε_k, les projetantes issues des deux cycles à une dimension (K, ω) et (K, ω') se sépareront et s'étaleront sur le doigt $\Delta(\varepsilon_k)$, de sorte que ces doigts $\Delta(\varepsilon_k)$ complètent la frontière de W. Je puis donc écrire

$$K \sim S_2(o) + \sum \Delta(\varepsilon_k),$$

$\Delta(\varepsilon_k)$ a pour frontière $(K, \omega, o) - (K, \omega, o')$; $S_2(o)$ aura pour frontières $\sum [(K, \omega, o) - (K, \omega, o')]$ de telle façon que la variété totale $S_2(o) + \sum \Delta(\varepsilon_k)$ soit comme il convient une variété fermée.

Soit J l'intégrale

$$\int\int \frac{P\,dx\,dy}{F'_z}$$

étendue à K. Elle sera égale à l'intégrale étendue à $S_2(o) + \sum \Delta(\varepsilon_k)$. Étendue à $S_2(o)$ elle est nulle, puisque, le long de cette surface, y est constant et que

$$dx\,dy = o.$$

L'intégrale étendue à $\Delta(\varepsilon_k)$ sera une combinaison linéaire des intégrales étendues aux différents doigts simples correspondants, intégrales que nous avons appelées $j(L_i)$.

L'intégrale J est donc une combinaison linéaire des intégrales $j(L_i)$,

la ligne L_i étant telle que $\alpha = \gamma = 0$, $\beta = 1$. C'est ce que nous avions annoncé dans un paragraphe antérieur.

J'ai dit que la surface $S_2(0)$ a pour frontière

$$\sum [(K, \omega, 0) - (K, \omega, 0')],$$

de sorte que

$$\sum [(K, \omega, 0) - (K, \omega, 0')] \sim 0$$

sur la surface $S(0)$. Supposons que les doigts simples correspondant à $\Delta(\varepsilon_k)$ soient $\Delta(\varepsilon_k, \Omega_1)$, $\Delta(\varepsilon_k, \Omega_2)$ et soient Ω_1^0 et Ω_2^0 les cycles correspondants de $S(0)$.

Soit

$$\Delta(\varepsilon_k) \sim n_1 \Delta(\varepsilon_k, \Omega_1) + n_2 \Delta(\varepsilon_k, \Omega_2) + \sigma(0),$$

on aura sur $S(0)$

$$(K, \omega, 0) - (K, \omega, 0') \sim n_1 \Omega_1^0 + n_2 \Omega_2^0,$$

d'où

$$\sum (n_1 \Omega_1^0 + n_2 \Omega_2^0) \sim 0$$

sur $S(0)$.

Ainsi pour un cycle K de l'espèce considérée, mais quelconque, on aura toujours

$$K \sim S_2(0) + \sum n_i \Delta(\varepsilon_k, \Omega_i), \tag{1}$$

$S_2(0)$ étant une partie de $S(0)$, n_i un entier et Ω_i un des cycles évanouissants relatifs à ε_k; d'ailleurs les entiers n_i et les cycles Ω_i ne devront pas être quelconques, car on devra avoir sur $S(0)$

$$\sum n_i \Omega_i^0 \sim 0, \tag{2}$$

Ω_i^0 étant le cycle de $S(0)$ qui correspond à Ω_i.

Mais nous nous sommes jusqu'ici restreints au cas où le point $y = 0$, de même que le point $y = \infty$, correspondait à une région R_0 par rap-

port à K, c'est-à-dire où, pour aucun point du cycle C, on n'a ni $y = 0$, ni $y = \infty$. Les cycles qui satisfont à cette condition pourront s'appeler de la première sorte et l'on voit que tout cycle de la première sorte peut être ramené à la forme (1).

Passons aux cycles de la seconde sorte, ce seront ceux où l'excès $2p - n$ dont il a été question au paragraphe du nombre des points pour lesquels le déterminant Δ est positif sur celui des points où ce déterminant est négatif, où cet excès, dis-je (constant pour tout le plan des y d'après ce que nous avons vu) est constamment nul. Je dis que tout cycle de la seconde sorte peut être ramené à la première.

Supposons en effet qu'un cycle K admette $2h$ points pour lesquels $y = 0$, et que h de ces points soient tels que $\Delta > 0$ et h tels que $\Delta < 0$. Accouplons ces points deux à deux de telle façon qu'à un point tel que $\Delta > 0$ soit accouplé un point tel que $\Delta < 0$. Soit M_1 et M_2 un pareil couple de points. Entourons M_1 sur le cycle K d'un contour infiniment petit C_1; soit D_1 la portion très petite de K limitée par ce contour. Définissons de même autour de M_2 le contour C_2 et le domaine D_2; nous pourrons supposer que les valeurs de y correspondantes aux différents points de C_1 soient les mêmes que celles qui correspondent aux différents points de C_2. Ces valeurs formeront alors dans le plan des y un contour fermé très petit γ entourant le point $y = 0$; je puis alors imaginer un contour mobile C à une dimension et un domaine mobile D à deux dimensions satisfaisant aux conditions suivantes : 1° le contour C sera la fonrtière de D; 2° C et D varieront d'une manière continue; 3° initialement C et D se confondront avec C_1 et D_1 et finalement avec C_2 et D_2; 4° les valeurs de y correspondant au contour C seront sur le contour fermé très petit γ.

Dans ces conditions, C engendrera une variété à deux dimensions U et D une variété à trois dimensions W. La frontière complète de W se composera de U, D_1 et D_2. Car W est assimilable à un cylindre dont U serait la surface latérale et D_1 et D_2 les deux bases; on aura donc

$$U \sim D_1 + D_2,$$

d'où

$$K \sim K - D_1 - D_2 + U.$$

Aussi nous pouvons remplacer K par $K - D_1 - D_2 + U$; ce cycle

a perdu ainsi les deux points M_1 et M_2 et n'a gagné aucun autre point pour lequel $y = 0$, car sur U la variable y reste constamment sur le contour γ, qui ne passe pas par $y = 0$. En opérant de même sur tous les autres couples de points, nous ferons disparaître tous les points pour lesquels $y = 0$. On ferait disparaître de même tous les points pour lesquels $y = \infty$, de sorte que le cycle se trouverait ramené à la première sorte.

Restent enfin les cycles pour lesquels l'excès $2p - n$ n'est pas nul. Le premier d'entre eux nous est fourni par la surface de Riemann

$$x = x_0,$$

où x_0 est une constante quelconque.

Pour cette surface, en effet, l'excès en question est égal au degré de la surface $F = 0$, que j'appellerai m; car à un point $y = y_0$ du plan des y correspondront m points de la surface dont le z sera donné par l'équation

$$F(x_0, y_0, z) = 0.$$

(Dans certains cas particuliers, le degré de cette équation en z est plus petit que celui de la surface $F = 0$, c'est alors le degré de l'équation en z que nous appellerons m.)

Pour ces m points le déterminant Δ est positif; l'excès $2p - n$ est donc bien égal à m.

Soit donc K un cycle pour lequel cet excès soit égal à q et H le cycle $x = x_0$.

Alors le cycle $m\mathrm{K} - q\mathrm{H}$ aura pour excès zéro; il sera donc de la deuxième sorte et pourra être ramené à la première.

Donc le cycle $m\mathrm{K}$ sera homologue à q fois le cycle $x = x_0$ plus un cycle de la forme (1).

Ici nous apercevons une des différences les plus importantes entre les résultats qui ressortent de la convention adoptée ici et de celle qui était adoptée dans le Mémoire cité. Considérons l'intersection de la surface $F = 0$ avec le plan

$$P_1 = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z - \delta_1 = 0$$

et l'intersection avec le plan

$$P_2 = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z - \delta_2 = 0.$$

A ces deux courbes correspondront deux surfaces de Riemann et, par conséquent, deux cycles à deux dimensions que j'appellerai K_1 et K_2. Je dis qu'on aura

$$K_1 \sim K_2.$$

En effet, considérons les intersections de $F = 0$ avec $P_1 + \lambda P_2 = 0$, où λ est réel et positif, mais varie d'ailleurs de 0 à ∞; les points de ces différentes intersections engendreront une variété W à trois dimensions. Quelle est la frontière de W? Elle se compose des deux cycles K_1 et K_2 de sorte que

$$K_1 \sim K_2.$$

Il ne pourrait y avoir de doute qu'en ce qui concerne les points à l'infini des courbes

$$F = P_1 + \lambda P_2 = 0,$$

ce sont des points de la surface de Riemann $S(\infty)$; à chaque valeur de λ correspondent un nombre fini de ces points, de sorte que, quand λ variera de 0 à l'∞, ces points décriront une ligne à une dimension seulement qui ne saurait constituer une frontière pour W qui en a trois.

Ainsi le cycle K_1, le cycle K_2 sont homologues entre eux, homologues par conséquent aussi au cycle $S(0)$, ou au cycle $S(y)$ quel que soit y, ou au cycle $x = x_0$.

Il n'en serait pas de même avec la convention du Mémoire cité, car pour $P_1 = z$, par exemple, on pourrait faire tendre x et y vers l'infini et en même temps λ vers zéro, de telle sorte que P_2 tende vers l'infini et $-\lambda P_2 = P_1 = z$ vers une limite finie quelconque; or avec cette convention les points $x = y = \infty$, $z = z_1$ et $x = y = \infty$, $z = z_2$ seraient regardés comme distincts et engendreraient une variété à deux dimensions que j'appellerai Z quand z_1 et z_2 prendraient toutes les valeurs possibles. Alors la frontière de W se composerait non seulement de K_1 et de K_2, mais encore de Z.

On a donc

$$K_2 \sim K_1 + Z.$$

Soient de même X la variété à deux dimensions formée par les points où x est fini, y et z infinis, et Y celle qui est formée par les points où y est fini, x et z infinis; on aura alors

$$K_1 \sim X + Y$$

et

$$K_2 \sim X + Y + Z,$$

et cette homologie sera vraie pour tous les cycles K_2 engendrés par les points satisfaisant à l'équation $\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z - \delta_2 = 0$, *à moins que deux des coefficients* α_2 β_2, γ_2 *ne soient nuls à la fois*, auquel cas le second membre devrait être remplacé par $X + Y$ si $\alpha_2 = \beta_2 = 0$, par $X + Z$ si $\alpha_2 = \gamma_2 = 0$, par $Y + Z$ si $\beta_2 = \gamma_2 = 0$.

Je n'entrerai pas dans plus de détails et ne rechercherai pas s'il y a une homologie entre X, Y, Z, me contentant de faire remarquer que le cycle $x = x_0$ n'est pas homologue à $S(0)$.

Au contraire, avec la convention nouvelle, tous les cycles engendrés par les points satisfaisant à une équation de la forme

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \varepsilon$$

sont homologues entre eux et, en particulier, il en est ainsi de $S(0)$ et du cycle $x = x_0$.

Nous devons toutefois faire observer que, pour certaines valeurs des coefficients α, β, γ, ε, le cycle $\alpha x + \beta y + \gamma z = \varepsilon$ peut se décomposer et que, en particulier, la surface de Riemann $S(y)$ peut se décomposer pour certaines valeurs de y.

Supposons donc que la surface $S(y)$, indécomposable pour la valeur la plus générale de y, se décompose en $S_1(\varepsilon_k)$ et $S_2(\varepsilon_k)$ pour $y = \varepsilon_k$. Il est clair qu'on aura alors

$$S(y) \sim S_1(\varepsilon_k) + S_2(\varepsilon_k),$$

mais qu'il n'y aura en général aucune homologie entre $S_1(\varepsilon_k)$ et

$S_2(\varepsilon_k)$; nous avons vu d'ailleurs qu'il arrive alors que $S_1(\varepsilon_k)$ est homologue au doigt $\Delta(\varepsilon_k)$, plus une portion de $S(0)$.

§ 6. — Homologies entre les cycles.

Ainsi tous nos cycles peuvent se ramener à $S(0)$ ou à un cycle de la forme (1). Tous les cycles que l'on peut former ainsi sont-ils distincts? Toute combinaison de $S(0)$ et de cycles de la forme (1) est elle-même une combinaison de la forme (1) et, par conséquent, en tous ses points y est nul ou appartient à l'une des coupures. Est-il possible qu'une pareille combinaison soit homologue à zéro? C'est-à-dire existe-t-il une variété à trois dimensions W dont une pareille combinaison forme la frontière complète?

Soit W une pareille variété, soit y_0 une valeur de y n'appartenant pas à l'une des coupures; soit $W(y_0)$ l'ensemble des points de W pour lesquels $y = y_0$; alors $W(y_0)$ formera une ligne ou variété à une dimension. Cette ligne $W(y_0)$ peut-elle aboutir à un point d'arrêt? Non, car ce point d'arrêt appartiendrait à la frontière de W, ce qui est impossible, puisque, pour tous les points de cette frontière, y est nul ou se trouve sur l'une des coupures et ne peut, par conséquent, être égal à y_0. A moins que ce point d'arrêt ne soit l'un des m points communs à toutes les surfaces de Riemann $S(y)$ et qui sont donnés, comme nous l'avons vu plus haut, par l'équation

$$F_m(x, 0, z) = 0.$$

Soient $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ ces m points.

Ainsi $W(y_0)$ se composera de cycles fermés et de lignes allant de l'un des points Q à un autre.

La ligne $W(y_0)$ appartient à la surface $S(y_0)$; considérons sur la surface $S(y_1)$ les points qui correspondent à ceux de $W(y_0)$ en vertu de la loi de correspondance adoptée plus haut; soit $W(y_0, y_1)$ l'ensemble de ces points. Je dis que la ligne $W(y_0, y_1)$ restera toujours homologue à elle-même sur la surface $S(y_1)$ quand y_1 restant constant

on fera varier y_0. Si en effet y_0 varie d'une façon continue, $W(y_0)$ et par conséquent $W(y_0, y_1)$ varieront d'une façon continue, sans quoi le $W(y_1)$ pour lequel une discontinuité se produirait devrait appartenir à la frontière de W.

Il résulte de là par exemple que, s'il y avait des valeurs de y pour lesquelles W n'admette aucun point, $W(y_0, y_1)$ devrait être *constamment* homologue à zéro sur $S(y_1)$ et que, par conséquent, il en serait de même de $W(y_0)$ sur $S(y_0)$.

De quoi va alors se composer la frontière de W? Lorsque y_0 approchera d'un point η_1 de l'une des coupures, la ligne $W(y_0, y_1)$, toujours homologue à elle-même sur $S(y_1)$, tendra vers $W(\eta_1, y_1)$ et $W(y_0)$ tendra vers $W(\eta_1)$, de telle façon que $W(\eta_1, y_1)$ soit le lieu des points de $S(y_1)$ qui correspondent aux différents points de $W(\eta_1)$ sur $S(\eta_1)$. Quand maintenant y_0 approchera du même point par l'autre lèvre de la coupure, la ligne $W(y_0, y_1)$ tendra vers $W(\eta_1', y_1)$ et la ligne $W(y_0)$ tendra vers $W(\eta_1')$. En général, $W(\eta_1)$ ne sera pas homologue à $W(\eta_1')$, car les points de $W(\eta_1, y_1)$ sont les points de $S(y_1)$ qui correspondent à ceux de $W(\eta_1)$ *considérés comme appartenant à* $S(\eta_1)$; les points de $W(\eta_1', y_1)$ sont les points de $S(y_1)$ qui correspondent à ceux de $W(\eta_1')$ *considérés comme appartenant à* $S(\eta_1')$. Alors, bien que $W(\eta_1, y_1)$ soit homologue à $W(\eta_1', y_1)$ sur $S(y_1)$, il n'en résulte pas que $W(\eta_1)$ soit homologue à $W(\eta_1')$ sur $S(\eta_1)$.

La frontière de W sera alors engendrée par les cycles

$$W(\eta_1) - W(\eta_1')$$

quand on fait décrire successivement à η_1 toutes les coupures. Quand on fera varier η_1 depuis o jusqu'à ε_k le long de la coupure $o\varepsilon_k$, le cycle $W(\eta_1) - W(\eta_1')$, qui devra s'évanouir pour $\eta_1 = \varepsilon_k$, engendrera un doigt $\Delta(\varepsilon_k)$. La frontière de W est donc bien un cycle de la forme (1).

Combien pouvons-nous obtenir de cette façon d'homologies entre les cycles de la forme (1)?

Tout dépend de l'hypothèse faite au sujet de la ligne $W(y_0, y_1)$. Il est clair que, si l'on remplace cette ligne par une autre qui lui soit homologue sur $S(y_1)$, les deux homologies que l'on obtiendra ainsi ne seront pas distinctes.

La ligne $W(y_0, y_1)$ pourra se composer de l'un des $2p$ cycles de la surface de Riemann $S(y_1)$, ou d'une ligne allant sur cette surface de Q_1 à l'un des $m-1$ autres points $Q_2, Q_3, \ldots, Q_m$, ou d'une combinaison de ces lignes, aucune autre hypothèse n'est possible. D'ailleurs, si l'on envisage deux lignes allant de Q_1 à Q_2, il suffira de considérer la première, car la réunion de ces deux lignes formerait un cycle. Cela nous fait donc en tout $2p+m-1$ homologies.

Ces homologies sont-elles toutes distinctes? Si le cycle

$$W(\eta) - W(\eta')$$

est homologue à zéro sur $S(\eta)$ et cela sur toutes les coupures, il est clair que l'homologie correspondant à W se réduit à une identité. En effet, dans ce cas, les doigts $\Delta(\varepsilon_k)$ qui figurent dans le premier membre de l'homologie $S_1(o) + \sum \Delta(\varepsilon_k) \sim o$ sont homologues à zéro. plus une portion de $S(o)$; il reste donc $S_1(o) \sim o$, $S(o)$ étant une portion de $S(o)$; mais, comme une variété ne peut être homologue à zéro sans être fermée, cette homologie doit se réduire soit à une identité, soit à $S(o) \sim o$. Cette dernière hypothèse doit être rejetée puisque $S(o)$ n'est pas homologue à zéro. Si l'on peut former ainsi q homologies se réduisant à des identités, il n'y aura plus que

$$2p+m-q-1$$

homologies distinctes.

Si $W(y_0)$ est un cycle, il faut que $W(\eta) \sim W(\eta')$, c'est-à-dire que le cycle ne soit pas altéré quand y tourne autour du point singulier ε_k et qu'il en soit de même pour tous les autres points singuliers. Il faut, en d'autres termes, que $W(y_0)$ soit ce que nous avons appelé, dans le Mémoire cité, un *cycle invariant;* nous aurons donc d'abord autant d'homologies identiques que de cycles invariants, c'est-à-dire, d'après le Mémoire cité, autant que de cycles à trois dimensions, ou encore autant que de cycles à une dimension.

Y en a-t-il d'autres? Supposons que la ligne $W(y_0)$ aboutisse à un point Q_1, considérons la portion de la variété à quatre dimensions V voisine de Q_1; soit M un point de V infiniment voisin de Q_1; soit II le plan tangent à la variété V au point Q_1; ce sera une variété plane à

quatre dimensions appartenant à l'espace plan à plus de quatre dimensions dans lequel nous supposons V tracée; la droite MQ_1, si les deux points M et Q_1 sont infiniment voisins, sera dans le plan II. Portons alors sur la droite MQ_1 une longueur égale à 1 à partir de Q_1 et soit $H(M)$ le point ainsi obtenu; les points $H(M)$ appartiendront à l'hypersphère de rayon 1 et de centre Q_1, ou plutôt à l'intersection de cette hypersphère et du plan II, intersection que j'appelle J et qui est une variété hypersphérique II à trois dimensions. Si deux points M et M' sont de part et d'autre de Q_1, de telle façon que les deux droites MQ_1 et Q_1M' soient dans le prolongement l'une de l'autre, les deux points $H(M)$ et $H(M')$ seront diamétralement opposés sur J.

Considérons maintenant les points M de W qui sont très voisins de Q_1: les $H(M)$ correspondants engendreront une variable à deux dimensions $H(W)$ située sur J; considérons de même les points M très voisins de Q_1 et tels que $y = y_0$: les $H(M)$ correspondants engendreront une variété à une dimension $H(y_0)$ située sur J. Enfin les points de $W(y_0)$ donneront des $H(M)$ en nombre fini et dont l'ensemble pourra s'appeler $H(W, y_0)$. Si alors un point appartient à $H(y_0)$, il en sera de même du point diamétralement opposé.

Au contraire, si un point appartient à $H(W, y_0)$, il n'en sera pas de même du point diamétralement opposé, puisque par hypothèse la ligne $W(y_0)$ s'arrête au point Q_1 et ne se prolonge pas au delà. Donc, si un point appartient à $H(W)$, il n'en sera pas de même du point diamétralement opposé, sans quoi nous aurions deux points diamétralement opposés sur un même $H(W, y_0)$.

Si la ligne $W(y_0)$ doit nous conduire à une homologie se réduisant à une identité, nous venons de voir que $W(\eta)$ doit être homologue à $W(\eta')$ sur $S(\eta)$. Je puis sans restreindre la généralité supposer que $W(\eta)$ est non seulement homologue mais identique à $W(\eta')$. Si, en effet, il en était autrement, soit $C(\eta)$ la portion de $S(\eta)$ limitée par le cycle $W(\eta) - W(\eta')$ homologue à zéro. Soit $P(\varepsilon_k)$ la variété à trois dimensions engendrée par $C(\eta)$ quand η varie de zéro à ε_k en suivant la coupure; elle est limitée par l'ensemble des cycles

$$W(\eta) - W(\eta')$$

qui la séparent de W, et par $C(0, \varepsilon_k)$, en désignant par $C(0, \varepsilon_k)$ la

limite vers laquelle tend $C(\eta)$ quand η tend vers zéro en suivant la coupure $O\varepsilon_k$. Il est clair que $C(o, \varepsilon_k)$ est une portion de $S(o)$.

Envisageons alors la variété à trois dimensions

$$W + \sum P(\varepsilon_k)$$

où la sommation indiquée par le signe $\sum$ est étendue aux différentes coupures.

La variété W avait pour frontière l'ensemble des cycles

$$W(\eta) - W(\eta')$$

plus une partie de $S(o)$, la variété $\sum P(\varepsilon_k)$ avait pour frontière l'ensemble des cycles $W(\eta) - W(\eta')$ plus $\sum C(o, \varepsilon_k)$ qui est une partie de $S(o)$. Quand nous annexons les deux variétés l'une à l'autre, la partie commune de la frontière disparaît, de sorte que la frontière complète fait partie de $S(o)$. Comme cette frontière complète doit être une variété *fermée* à deux dimensions, ou bien elle se réduira à zéro, de sorte que $W + \sum P(\varepsilon_k)$ est une variété fermée, ou bien elle sera la surface $S(o)$ tout entière, ce qui est très possible puisque cette surface n'est pas homologue à zéro.

Ainsi, $W + \sum P(\varepsilon_k)$ est une variété *fermée* à trois dimensions; il est vrai qu'elle présente une circonstance toute particulière, puisque pour certaines valeurs de y, à savoir les valeurs $y = \eta$, les points de cette variété pour lesquels $y = \eta$ forment non plus une ligne, mais une variété à deux dimensions $C(\eta)$. Mais il suffit de déformer infiniment peu notre variété pour faire cesser cette circonstance gênante. Nous pouvons donc, sans restreindre la généralité, supposer que W est une variété fermée et, par conséquent, que $W(\eta)$ est identique à $W(\eta')$.

Alors, $H(W)$ est une variété fermée; supposons d'abord que Q_1 soit l'extrémité d'une des branches de la ligne $W(y_0)$ et n'appartient à aucune autre branche de cette ligne; il suffit évidemment que cela

ait lieu pour une valeur de y_0 pour que cela ait lieu pour toutes. Dans ce cas $H(W)$ a un seul point commun avec $H(y_0)$: ce sont deux variétés fermées l'une à deux, l'autre à une dimension tracées sur l'hypersphère H. Si elles n'ont qu'un point commun c'est qu'elles ne sont ni l'une ni l'autre homologues à zéro sur H: *or cela est absurde puisque* H *est simplement connexe.*

Prenons un cas plus général : chacune des branches de $W(y_0)$ peut être parcourue dans deux sens opposés; nous distinguerons donc un sens positif et un sens négatif. D'autre part nous attribuerons un signe à l'intersection de $H(W)$ et de $H(y_0)$ [d'après le signe d'un certain déterminant ainsi qu'il a été expliqué dans l'*Analysis situs* (*Journal de l'École Polytechnique*, 2e série, 1er Cahier, p. 33 et suiv.)]. Supposons donc que p branches de $W(y_0)$ aboutissent à Q_1 de façon que Q_1 soit à la *fin* de la branche quand on décrit cette branche dans le sens positif, et n quand on décrit la branche dans le sens négatif.

Alors $H(W)$ et $H(y_0)$ admettront p intersections positives et n négatives. Ou bien alors l'excès $p-n$ ne sera pas nul, ce qui est impossible parce qu'on pourrait avoir $H(W) \sim 0$ sur H et que H est simplement connexe; ou bien cet excès sera nul et alors la ligne $W(y_0)$ pourra être remplacée par une autre ne passant pas par Q_1.

Il est donc impossible qu'il existe une variété W satisfaisant aux conditions énoncées; il n'y a donc pas d'autre homologie identique que celles que l'on déduit des cycles invariants.

En résumé, soit N le nombre des points singuliers $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, en tenant compte du degré de multiplicité, un de ces points pouvant être double par exemple s'il correspond à deux cycles évanouissants.

Soit $2p$ le nombre des cycles de la surface de Riemann $S(y)$.

Soit m le nombre des points tels que $Q_1, Q_2, \ldots$.

Soit q le nombre des cycles invariants de $S(y)$, ou, ce qui revient au même, le nombre des cycles à une ou à trois dimensions de $F(0)$.

Nous aurons N doigts, tous nos cycles seront des combinaisons de la forme (1), c'est-à-dire des combinaisons de ces N doigts et de $S(0)$; mais toutes les combinaisons de ces $N+1$ variétés ne conviennent pas; elles doivent satisfaire à la condition (2); cette condition, puisque $S(0)$ admet $2p$ cycles, équivaut à $2p$ conditions simples. Il reste ainsi $N+1-2p$ cycles.

Mais ces cycles sont liés par des homologies, engendrées par les différentes lignes $W(y_0)$ possibles; il y en a $2p$ provenant des $2p$ cycles fermés qu'on peut tracer sur $S(y_0)$; il y en a $m-1$ provenant des $m-1$ lignes qui vont d'un point Q à l'autre. Si ces $2p+m-1$ homologies sont distinctes, ce qui arrive en général, il reste

$$N+2-4p-m,$$

cycles à deux dimensions distincts. Mais il y a q homologies identiques, il y a donc finalement

$$N+q+2-4p-m \tag{3}$$

cycles à deux dimensions.

§ 7. — Application aux surfaces du troisième degré.

Appliquons ces principes à la surface du troisième degré. Dans les paragraphes précédents, un rôle essentiel était joué par les surfaces de Riemann $S(y)$ correspondant aux intersections de la surface $F=0$ avec le plan $y=$ const. Si nous prenons les coordonnées homogènes

$$x, \quad y, \quad z, \quad t,$$

ces plans $y=$ const. passent par une droite fixe située à l'infini et qui a pour équations $y=t=0$. On pourrait répéter la même analyse en faisant jouer le rôle de cette droite $y=t=0$ à une droite quelconque D et le rôle des surfaces $S(y)$ aux surfaces de Riemann correspondant aux intersections de $F=0$ avec les plans passant par D.

Cela revient à faire un changement de coordonnées tétraédriques en prenant cette droite D pour l'une des arêtes du tétraèdre de référence. Tout étant projectif, il est clair que le résultat doit rester le même quelle que soit la droite D et l'on en comprendra d'ailleurs mieux les raisons en se reportant à ce qui a été dit aux paragraphes 2 et 3.

L'application de la formule (3) doit conduire au même nombre de cycles à deux dimensions, de quelque façon que soit choisie la droite D.

Mais, si ce résultat est certain *a priori*, il conduit à quelques paradoxes apparents et il est intéressant de voir par quel mécanisme se fait la compensation. M. Picard, en étudiant une surface du troisième degré particulière, sur laquelle nous reviendrons, avait déjà mis en évidence certaines propositions paradoxales, dont il avait donné l'explication.

Dans la formule (3), le nombre q représente le nombre des cycles linéaires. Ce nombre est évidemment indépendant de la droite D. Il est d'ailleurs nul, comme l'a montré M. Picard, pour la surface du troisième degré.

Le nombre N est le nombre des plans tangents que l'on peut mener à la surface par la droite D. Ce nombre est égal à 12 dans le cas le plus général.

Le nombre p est le genre de la courbe, intersection de $F = 0$ par un plan passant par la droite D; il est égal à 1.

Les points $Q_1, Q_2, \ldots$ sont les intersections de la surface $F = 0$ et de la droite D; le nombre m est le nombre de ces intersections. Il est égal à 3 dans le cas général. On a donc, dans le cas général,

$$q = 0, \qquad N = 12, \qquad p = 1, \qquad m = 3$$

et, pour le nombre de cycles,

$$N + q + 2 - 4p - m = 7.$$

Supposons maintenant que la surface $F = 0$, restant toujours la plus générale, la droite D prenne des positions particulières.

Supposons d'abord que la droite D devienne tangente à la surface; deux des plans tangents menés par D se confondront et N se réduira à 11, mais deux des points d'intersection de D se confondront et m se réduira à 2. Le nombre $N + q + 2 - 4p - m$ ne changera pas.

Supposons maintenant que l'un des plans tangents menés par D coupe la surface suivant une courbe présentant un point de rebroussement; ici encore deux plans tangents se confondront, mais il faut tenir compte du degré de multiplicité. Or nous avons vu que, dans le cas d'un rebroussement, il y a deux cycles évanouissants et que, par con-

séquent, le plan tangent doit être regardé comme double; le nombre N reste donc égal à 12.

La surface $F = 0$ contient vingt-sept droites que nous appellerons les *droites* Δ. Supposons que D rencontre l'une des droites Δ. Le plan de D et de Δ coupe la surface suivant la droite Δ et une conique; c'est donc un plan tangent double avec deux points de contact distincts.

Le nombre des plans tangents *distincts* se réduit donc à 11, mais ce plan $D\Delta$ doit être regardé comme double; il n'y a, il est vrai, qu'un seul cycle évanouissant, mais la courbe se décompose; cela fait donc deux doigts simples, l'un engendré par le cycle évanouissant, l'autre homologue à l'une des composantes de la surface de Riemann, donc N reste égal à 12.

Les divers plans menés par Δ coupent la surface suivant des coniques; deux de ces coniques touchent la droite Δ. Soient P_1 et P_2 les plans de ces deux coniques et supposons que Δ soit dans le plan P_1. Alors trois de nos douze plans tangents se confondent, les deux points de contact du plan tangent $D\Delta$, qui étaient distincts et équivalents à deux points doubles à tangentes séparées, se confondent en un seul, équivalent à un point de rebroussement. Nous avons cette fois deux cycles évanouissants, cela nous fait *trois* doigts simples dont deux correspondent à ces deux cycles et un est homologue à l'une des composantes de la surface de Riemann (composante relative à la droite, ou bien à la conique); donc le plan tangent P_1 doit être regardé comme triple et N reste égal à 12.

Ainsi voilà trois cas où le plan tangent correspond à deux, deux ou trois plans tangents confondus : ce sont ceux où ce plan coupe la surface suivant une cubique à rebroussement, suivant une droite Δ et une conique qui la coupe, suivant une droite Δ et une conique qui la touche; nous venons de voir que ce plan doit être alors regardé comme double, double ou triple. Mais il peut arriver que, dans l'un de ces trois cas, la droite D passe par le point de contact, c'est ce qui arrive respectivement si D touche la surface en un point où l'indicatrice est parabolique, si D coupe Δ en un point où cette droite rencontre la conique intersection du plan $D\Delta$ et de la surface $F = 0$, si D coupe Δ au point où cette droite *touche* la conique intersection de $D\Delta$ et de la surface. Le plan tangent correspond alors à trois, trois ou quatre plans tangents

confondus, et il reste double, double ou triple; le nombre N se réduit donc à 11, mais, comme D touche la surface, le nombre m se réduit à 2, de sorte que la différence $N - m$ et le nombre des cycles

$$N + q + 2 - 4p - m$$

ne changent pas.

Si la droite D est une asymptote de l'indicatrice en un point de la surface, le plan tangent correspondant équivaut à trois plans tangents confondus; donc N se réduit à 10, mais, d'autre part, D coupe la surface en trois points confondus, de sorte que m se réduit à 1 et que la différence $N - m$ ne change pas.

Il peut se faire que, parmi les plans tangents menés par D, il y en ait deux ou plusieurs qui présentent séparément l'une des singularités que nous venons d'étudier; rien n'est à changer alors à ce qui précède. Il peut arriver enfin que par la droite D on puisse mener un plan qui coupe la surface suivant trois droites Δ, qui soit par conséquent triplement tangent à la surface. Ce plan correspondra à trois plans tangents confondus. Quel est son degré de multiplicité, c'est-à-dire le nombre de doigts simples auxquels il correspond? Il n'y a qu'un cycle évanouissant, mais la surface de Riemann $S(\varepsilon_k)$ se décompose en trois parties $S_1(\varepsilon_k)$, $S_2(\varepsilon_k)$, $S_3(\varepsilon_k)$ correspondant aux trois droites. Nous aurons donc trois doigts simples, le premier engendré par le cycle évanouissant, le deuxième homologue à $S_1(\varepsilon_k)$ plus une partie de $S(0)$, le troisième homologue à $S_2(\varepsilon_k)$ plus une partie de $S(0)$. Le cycle qui serait homologue à $S_3(\varepsilon_k)$ plus une partie de $S(0)$ n'est pas distinct des précédents, car, toutes les surfaces $S(y)$ étant homologues entre elles, comme nous l'avons vu, on a

$$S_1(\varepsilon_k) + S_2(\varepsilon_k) + S_3(\varepsilon_k) \sim S(0),$$

de sorte qu'une combinaison de nos trois doigts nous ramène au cycle $S(0)$. En résumé, ce plan triplement tangent, qui équivaut à trois plans tangents confondus, a pour degré de multiplicité 3, de sorte que N reste égal à 12.

Il nous reste à examiner le cas où D est l'une des droites Δ. Alors D rencontre dix autres droites Δ, que j'appellerai A_1 et B_1, A_2 et B_2, A_3 et B_3, A_4 et B_4, A_5 et B_5.

Les droites A_i et B_i se rencontrent quel que soit i et il n'y a pas d'autre rencontre entre les droites A et B. Par D on peut mener cinq plans tangents qui sont les cinq plans DA_iB_i: que sont devenus les sept autres plans tangents? Soit D' une droite très voisine de D; par D' nous pouvons mener douze plans tangents, dont cinq tendront vers les cinq plans DA_iB_i; vers quelles limites tendront les sept autres et les points de contact correspondants? Parmi les plans menés par D, il y en a deux, P_1 et P_2, qui coupent la surface suivant la droite D et une conique qui la touche. Eh bien, deux plans tangents tendront vers P_1 et deux vers P_2.

Il reste à voir ce que deviennent les trois plans tangents restants. Soient M'_1, M'_2, M'_3 les trois points d'intersection de D' avec la surface; quand D' tendra vers D, ces trois points tendront vers trois points M_1, M_2, M_3 de D; eh bien, les points de contact des trois plans tangents restants tendront vers M_1, M_2, M_3.

Quant aux cycles à deux dimensions correspondants, voici ce qu'ils deviennent. Considérons d'abord un plan tangent qui, à la limite, se réduit au plan A_iB_iD; la surface de Riemann correspondant à l'intersection de ce plan et de la surface se décompose à la limite en trois parties correspondant aux trois droites A_i, B_i, D; le *doigt* correspondant est à la limite homologue à l'une de ces trois parties, par exemple à la surface de Riemann correspondant à la droite A_i et que j'appellerai $S(A_i)$. Voilà donc déjà cinq de nos sept cycles correspondant aux cinq surfaces de Riemann $S(A_1)$, $S(A_2)$, ..., $S(A_5)$. Les sept doigts correspondant aux sept autres plans tangents nous fourniront à la limite, par leurs combinaisons entre eux et avec $S(o)$, un seul cycle nouveau qui sera la surface de Riemann $S(D)$; cette notation $S(A_i)$, $S(D)$ ne peut engendrer aucune confusion avec $S(y)$, puisque A_i et D sont des droites et y une quantité. Il nous reste un dernier cycle qui est $S(o)$, mais

$$S(o) \sim S(D) + S(A_i) + S(B_i),$$

puisque $S(o)$ est homologue à la surface de Riemann correspondant à l'intersection de la surface avec un plan quelconque, et que, quand ce plan est le plan DA_iB_i, cette surface de Riemann se décompose en $S(D)$, $S(A_i)$, $S(B_i)$.

En conséquence, tous les cycles à deux dimensions de $F = 0$ sont homologues à des combinaisons des sept cycles suivants :

$$S(D), \quad S(A_1), \quad S(A_2), \quad S(A_3), \quad S(A_4), \quad S(A_5), \quad S(B_1),$$

qui ne sont autre chose que des surfaces de Riemann correspondant à sept des vingt-sept droites Δ.

Quelques mots maintenant sur les intersections mutuelles de ces cycles; quel est l'excès du nombre des intersections positives sur celui des intersections négatives, en adoptant le point de vue du paragraphe 9 de l'*Analysis situs* (*Journal de l'École Polytechnique*, 2e série, Ier Cahier, p. 33)? Si nous considérons deux surfaces de Riemann $S(y_1)$ et $S(y_2)$, cet excès sera évidemment 3; si nous considérons deux surfaces de Riemann $S(\Delta_1)$ et $S(\Delta_2)$ correspondant à deux droites Δ, cet excès sera 1 ou zéro, suivant que ces deux droites se rencontreront ou non. Si nous considérons deux cycles K_1 et K_2, nous représenterons cet excès par $N(K_1, K_2)$; si alors

$$K_1 \sim K'_1, \qquad K_2 \sim K'_2,$$

on aura également

$$N(K_1, K_2) = N(K'_1, K'_2).$$

Si maintenant

$$K_2 \sim n_0 S(D) + \Sigma n_i S(A_i) + n_6 S(B_1),$$

il viendra

$$N(K_1, K_2) = n_0 N[K_1, S(D)] + \Sigma n_i N[K_1, S(A_i)] + n_6 N[K_1, S(B_1)],$$

d'où cette conséquence que la connaissance des sept excès

$$N[K_1, S(D)], \quad N[K_1, S(A_i)], \quad N[K_1, S(B_1)]$$

suffit pour déterminer $N(K_1, K_2)$, K_2 étant un cycle quelconque.

Soit, en particulier, $K_1 = S(\Delta_1)$, $K_2 = S(\Delta_2)$, Δ_1 et Δ_2 étant deux quelconques des vingt-sept droites Δ : nous voyons que la connaissance du nombre des points d'intersection de Δ_1 avec D, les A_i et B_1 suffit pour déterminer le nombre des intersections de Δ_1 avec une droite

quelconque Δ_2, c'est-à-dire pour déterminer complètement la droite Δ_1.

C'est, en effet, ce qu'il est aisé de vérifier; une des vingt-sept droites sera complètement déterminée quand on saura si elle rencontre une autre des vingt-sept droites choisie au hasard D, et aussi si elle rencontre cinq autres des vingt-sept droites qui rencontrent D sans se rencontrer entre elles.

On sait que les surfaces du troisième degré sont unicursales. Si en effet on prend deux des vingt-sept droites Δ qui ne se rencontrent pas, soient D et D′; qu'on prenne un point M sur D et un point M′ sur D′ ayant pour abscisse, par exemple, le premier u, le second v, la droite MM′ rencontrera la surface en un troisième point M_1 dont les coordonnées sont des fonctions rationnelles du u et de v. De cette circonstance découlent des conséquences paradoxales sur lesquelles M. Picard a déjà appelé l'attention.

Si les valeurs de u et v correspondent à l'une des droites A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 qui rencontrent à la fois D et D′, la droite MM′ est tout entière sur la surface et les coordonnées du point M_1 deviennent indéterminées.

Si maintenant nous prenons un point M_1 sur la surface, les deux plans M_1D et M_1D' se couperont suivant une droite déterminée MM′, les points M et M′ seront donc déterminés et, par conséquent, u et v seront fonctions rationnelles des coordonnées de M_1. Si cependant le point M_1 était sur la droite D, le plan M_1D ne serait alors autre chose que le plan tangent en M_1 et ce qui précède subsisterait.

Le lieu des points $u = \infty$ est une conique C′ qui coupe D′ en deux points et le lieu des points $v = \infty$ est une conique C qui coupe D en deux points.

Reprenons maintenant la variété V à quatre dimensions engendrée par la surface $F = 0$; et sur cette variété un cycle K fermé à deux dimensions et non homologue à zéro. Soit W l'espace plan à quatre dimensions engendré par les deux variables complexes u, v; on pourrait d'abord être tenté de dire que, la surface étant unicursale, V et W doivent être homéomorphes, qu'à tout cycle fermé K de V correspondra un cycle fermé K′ de W; que, tous les cycles fermés de W étant homologues à zéro, il doit en être de même de tous les cycles fermés de V;

ce qui serait contraire aux conclusions qui précèdent. Les découvertes de M. Picard nous ont d'ailleurs depuis longtemps mis en garde contre un pareil raisonnement.

Le cycle K, en effet, peut rencontrer l'une des droites A_i ou l'une des coniques C ou C'. S'il rencontre C, par exemple, le cycle correspondant K' ne sera plus fermé, mais présentera un pointement à l'infini, ainsi que l'a signalé M. Picard.

Supposons maintenant que le cycle K' soit fermé et, par conséquent, homologue à zéro dans l'espace W. S'ensuivra-t-il que le cycle fermé correspondant K soit homologue à zéro sur V? Pas du tout. Il y a dans l'espace W cinq points auxquels correspondent une infinité de points de la variété V; ce sont les points $u = u_i$, $v = v_i$ qui correspondent aux cinq droites A_i; nous avons vu en effet que, pour ces valeurs de u et v, les coordonnées de M_1 sont indéterminées. Supposons alors que le cycle K' passe par l'un de ces points u_i, v_i; étant homologue à zéro sur W, il limitera un domaine à trois dimensions de cet espace. Mais considérons un point N de R et supposons que ce point se rapproche indéfiniment de u_i, v_i qui est sur la frontière de R. Soit M le point de V qui est le correspondant de N; quand N tendra vers u_i, v_i, le point M tendra vers un point de la droite A_i et ce point pourra occuper une position quelconque sur cette droite, suivant la façon dont N tendra vers u_i, v_i. Soit R' un domaine à trois dimensions de V correspondant à R; sa frontière complète se composera non seulement de K, cycle de V correspondant à K', mais de la surface de Riemann $S(A_i)$; car, quand N se rapproche de la frontière de R, le point correspondant M se rapproche soit de K si N tend vers un point de K' autre que u_i, v_i, soit d'un point quelconque de $S(A_i)$ si N tend vers u_i, v_i. Donc K n'est pas homologue à zéro.

Dans la variété W, on doit considérer comme distincts les points $u = \infty$, $v = v_1$ et $u = \infty$, $v = v_2$, de même que les points $u = u_1$, $v = \infty$ et $u = u_2$, $v = \infty$, puisque à ces points correspondent des droites MM distinctes. On doit donc adopter, au sujet des points à l'infini, non la convention du Mémoire actuel, mais celle du Mémoire cité. Il en résulte que les deux surfaces de Riemann $u =$ const. et $v =$ const. ne sont pas homologues entre elles. D'où cette conclusion : les cycles K' de W qui sont tous entiers à distance finie sont homologues à zéro ; mais,

si l'on tient compte de ceux qui s'étendent à l'infini, il y en a *deux* qui non seulement ne sont pas homologues à zéro, mais sont indépendants, ce sont justement ces deux surfaces de Riemann $u =$ const. et $v =$ const.

De plus, parmi les cycles K' homologues à zéro, il y en a qui ne correspondent pas à des cycles K homologues à zéro : ce sont ceux qui passent par l'un des points u_i, v_i et cinq de ces cycles doivent être considérés comme distincts, puisqu'il y a cinq points u_i, v_i. Nous retrouverons donc bien nos *sept* cycles distincts et la conciliation est complète avec ce qui précède.

Un mot encore sur une circonstance qui peut se présenter pour certaines surfaces du troisième degré particulières; il peut arriver que trois des droites Δ, que j'appellerai Δ_1, Δ_2, Δ_3, soient dans un même plan tangent P et passent par un même point M. C'est ce qui arrive en particulier pour la surface de M. Picard

$$x^3 + y^3 + z^3 = 1.$$

Si alors la droite D par laquelle doivent être menés les plans tangents se trouve sur le plan P, *quatre* des plans tangents menés par D se confondront avec P, de sorte que nous n'aurons plus que neuf plans tangents distincts au lieu de douze.

Il faut voir à combien de doigts distincts ce plan correspond. Pour nous en rendre compte, prenons la surface de Picard et coupons par exemple par les plans $z =$ const.; la droite D étant alors la droite à l'infini qui est l'intersection commune de tous ces plans $z =$ const. La courbe d'intersection est

$$x^3 + y^3 = 1 - z^3,$$

où z est regardé comme un paramètre. Les deux cycles sont des combinaisons de lacets tracés dans le plan des x et enveloppant les trois points singuliers

$$x = \sqrt[3]{1 - z^3}, \qquad x = \varepsilon\sqrt[3]{1 - z^3}, \qquad x = \varepsilon^2\sqrt[3]{1 - z^3},$$

ε étant une racine cubique de l'unité. Pour $z = 1$, ces trois points

singuliers se confondent avec O, les lacets se réduisent à un point et il en est de même des cycles, les deux cycles sont donc évanouissants.

De plus, pour $z = 1$, la courbe se décompose en trois droites Δ_1, Δ_2, Δ_3; donc, entre les deux doigts provenant des deux cycles évanouissants, nous en aurons deux autres homologues à $S(\Delta_1)$ et $S(\Delta_2)$; je ne parle pas de $S(\Delta_3)$ qui n'est pas distinct des précédents puisque

$$S(\Delta_1) + S(\Delta_2) + S(\Delta_3) \sim S(0).$$

Ainsi ce plan tangent quadruple donne naissance à quatre doigts distincts. Le nombre N n'est donc pas altéré.

Supposons enfin que la surface présente un point conique H; dans ce cas, six des droites Δ, comptant chacune pour deux, passent en H; je les appellerai Δ_1, Δ_2, ..., Δ_6; il y a quinze autres droites qui sont dans les quinze plans déterminés par les six premières. Le nombre des cycles K se réduit alors à 6; on peut le voir de trois manières :

1° Nos sept cycles $S(D)$, $S(\Lambda_i)$, $S(0)$ du cas général se réduisent ici à $S(\Delta_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ et $S(0)$, parce que, si l'on prend pour la droite D la droite Δ_1, les droites Λ_i ne sont autres que les cinq autres droites Δ_i; or, les droites Δ_i forment l'intersection de la surface avec le cône tangent au point H qui est du second degré. La surface de Riemann correspondant à l'intersection de la surface avec une quadrique quelconque est homologue à $2S(0)$, on a donc l'homologie

$$\Sigma S(\Delta_i) \sim 2S(0),$$

de sorte qu'il ne reste que six cycles distincts.

2° Si la droite D est quelconque, deux des plans tangents menés par D se confondent avec le plan DH, de sorte que les nombres N, p et m deviennent égaux à 11, 1, 3 et que

$$N + 2 - 4p - m = 6.$$

3° Si la droite D passe par H, un plan quelconque mené par D coupera la surface suivant une conique, et cette conique se décomposera en deux droites, quand ce plan passera par l'une des six droites Δ_i; on a donc $N = 6$, la conique étant unicursale, $p = 0$, et D coupant la

surface en deux points distincts, $m = 2$; on a donc

$$N + 2 - 4p - m = 6.$$

Plus généralement, quand une surface acquerra un point conique, le nombre des cycles à deux dimensions diminuera d'une unité. Soit, en effet, P le point conique, et supposons d'abord que la droite D ne passe pas par ce point, le plan PD devra être regardé comme un plan tangent, qui comptera pour *deux* plans tangents confondus, mais pour *un* seulement au point de vue de l'évaluation du nombre N. Le nombre N se changera donc en $N - 1$ et les autres nombres ne changeront pas.

Supposons maintenant qu'on fasse passer la droite D par P; les points de contact de la surface avec les plans tangents menés par D sont les intersections de cette surface avec une certaine courbe gauche, et cette courbe coupe la surface au point P, non plus en deux, mais en six points confondus; de plus, ce point P ne comptera plus dans l'évaluation du nombre N puisqu'il n'y a plus de plan PD. Donc N se changera, non plus en $N - 1$, mais en $N - 6$.

D'autre part, le genre p d'une section faite par un plan quelconque mené par D se change en $p - 1$ puisque toutes ces sections admettent un point double. Le nombre m des intersections distinctes de D avec la surface se change en $m - 1$ puisque deux de ces intersections sont confondues en P.

Le nombre $N + 2 - 4p - m$ se change donc en $N + 1 - 4p - m$.

Nous n'avons pas à nous inquiéter des plans tangents menés par D au cône tangent à la surface au point P. En effet, pour les sections faites par ces plans, le point double devient un point de rebroussement, ce qui n'altère pas le genre.



Sur quelques cas d'irréductibilité des polynomes à coefficients rationnels;

PAR M. G. DUMAS.

Les polygones de Newton occupent une place importante dans la théorie des fonctions algébriques d'une variable. Par leur intermédiaire, les résultats prennent une forme concise et élégante qu'il serait difficile d'obtenir autrement.

Dans le présent travail (¹) je me propose de montrer comment l'introduction de ces polygones dans l'étude des polynomes à coefficients rationnels met en évidence plusieurs faits nouveaux et permet, sous une forme tout à fait générale et intuitive, d'énoncer certains théorèmes qui se rattachent au critère d'irréductibilité découvert par Eisenstein.

Les suites ordonnées suivant les puissances croissantes d'un nombre premier p, introduites récemment dans la Science par M. Hensel, m'ont rendu la tâche facile. C'est dans celles-ci, en effet, que semble

(¹) Ce Mémoire est, à peu de chose près, identique à celui que l'auteur a présenté, en décembre 1904, à l'École Polytechnique de Zürich, pour l'obtention du grade de Privat-Docent. Seules quelques adjonctions, celle notamment de tout le premier paragraphe et de plusieurs numéros du deuxième, ont été faites pour rappeler ce que sont les notions nouvelles, constituant la base même de cette étude.

résider la raison profonde de l'analogie complète entre la théorie des fonctions algébriques et l'analyse supérieure des nombres.

D'une manière générale, je supposerai connues les notions développées par ce savant dans ses Mémoires du *Journal de Crelle* [1]. Il peut être utile également de comparer la première partie de ce travail avec les paragraphes du commencement de ma thèse [2] dans lesquels se trouvent exposés, sous forme différente, plusieurs résultats correspondant à ceux qui sont ici.

Les deux premiers paragraphes de la première Partie sont consacrés au rappel des notions dues à M. Hensel; les suivants à l'établissement de propositions relatives à des polynomes dont les coefficients sont des suites de Hensel.

La seconde Partie renferme des applications aux polynomes à coefficients rationnels, considérés comme cas particuliers des précédents.

Les théorèmes obtenus aux paragraphes **8**, **9** et **10**, relatifs à l'irréductibilité et à l'existence d'un plus grand commun diviseur, peuvent pour la plupart, ainsi qu'on s'en rend facilement compte, être établis directement, sans introduction des suites de Hensel.

Il n'y a pour cela qu'à donner indépendamment de celles-ci pour un polynome à coefficients rationnels (ou plus généralement pour un polynome dont les coefficients appartiennent à un domaine donné de rationalité) la définition du polygone de Newton relatif à un nombre premier. Le théorème du paragraphe **3** sur la composition des polygones n'en restera pas moins vrai et, de ce fait, toutes les considérations qui en découlent directement.

La même remarque s'appliquerait d'une façon pour le moins très étendue au problème résolu paragraphe **11**, dans lequel se détermine la puissance exacte d'un nombre premier p entrant comme diviseur dans le résultant des deux polynomes.

Le théorème du paragraphe **12** a des bases plus profondes. Son

---

(1) Hensel, *Neue Grundlagen der Arithmetik* (*Journal de Crelle*, t. 127). — *Ueber eine neue Begründung der Theorie der algebraischen Zahlen* (*Journal de Crelle*, t. 128).

(2) Dumas, *Sur les fonctions à caractère algébrique dans le voisinage d'un point donné*. Paris, 1904.

énoncé suppose les suites de Hensel, ma démonstration, les méthodes de ce géomètre. Celles-ci permettent de se passer d'idéaux dont la notion intervient souvent avec fruit dans mainte question d'irréductibilité. Le théorème du dernier paragraphe de ce Mémoire contient d'ailleurs comme cas particulier une proposition, due à Schœnemann, établie récemment par M. Michael Bauer (¹). Il me paraît utile de renvoyer à son travail pour la comparaison des méthodes.

PREMIÈRE PARTIE.

---

§ 1.

1. Les suites ou séries introduites par M. Hensel dans la Science mathématique sont de la forme

$$a_\rho p^\rho + a_{\rho+1} p^{\rho+1} + \ldots + a_{\rho+k} p^{\rho+k} + \ldots.$$

Elles se poursuivent aussi loin que l'on veut; p représente un nombre premier quelconque et les coefficients a_ρ, $a_{\rho+1}$, $a_{\rho+2}$, ... sont égaux à 0, 1, 2, ..., ou $p-1$, le premier a_ρ étant différent de zéro.

Le premier exposant ρ qui, par hypothèse, est un nombre entier peut être positif, nul ou négatif; c'est une quantité toujours finie, de sorte que les suites ci-dessus ne pourront jamais contenir, si elles en contiennent, qu'un nombre fini de termes dans lesquels l'exposant de p est négatif.

Une suite dans laquelle ρ est négatif est dite à *caractère rationnel;* si ρ est nul ou positif, elle est à *caractère entier*. Ces définitions sous-entendent les mots *dans le domaine du nombre premier p*. Souvent,

(¹) MICHAEL BAUER, *Verallgemeinerung eines Satzes von Schœnemann* (*Journal de Crelle*, t. 128).

pour abréger, nous emploierons les termes *suites entières* et *suites rationnelles* en p.

2. Deux suites rationnelles en p sont *égales* lorsque, dans chacune d'elles, les coefficients des mêmes puissances de p sont identiques. Si l'on a, par exemple,

$$A = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots,$$
$$B = b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \ldots,$$

l'on dit que A est égal à B, ce qui s'écrit

$$A = B \qquad (p)$$

lorsque, *si loin que se poursuit la comparaison,* l'on a toujours

$$a_0 = b_0,$$
$$a_1 = b_1,$$
$$a_2 = b_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

Le (p) placé à droite de l'égalité en caractérise la nature, on ne l'écrit d'ailleurs que dans le cas d'ambiguïté possible, celui, par exemple, où A et B, au lieu de représenter les développements eux-mêmes, seront les quantités auxquelles ceux-ci correspondront. Comme nous le verrons du reste, une égalité entre deux suites rationnelles en p ne symbolise jamais qu'un nombre aussi grand que l'on veut de congruences selon des puissances de p à prendre comme modules.

3. Les suites dont on vient de parler sont *réduites,* parce que leurs coefficients a_ρ, $a_{\rho+1}$, $a_{\rho+2}$, ... sont supposés égaux à l'un ou l'autre des nombres 0, 1, 2, ..., ou $(p-1)$. Le calcul conduit constamment à des suites qui ne satisfont pas à cette condition et il faut savoir passer d'une suite quelconque à la suite réduite à laquelle elle *équivaut.*

Soit, par exemple,

$$A = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots + a_n p^n + \ldots$$

une suite dont les coefficients a_i sont entiers mais quelconques. Nous écrivons [1]

$$\begin{aligned} A' = (a_0 - \varepsilon_1 p) + (\varepsilon_1 + a_1 - \varepsilon_2 p) p \\ + (\varepsilon_2 + a_2 - \varepsilon_3 p) p^2 + \ldots + (\varepsilon_n + a_n - \varepsilon_{n+1} p) p^n + \ldots, \end{aligned}$$

en déterminant, ce qui est toujours possible d'une seule façon, les ε_1, ε_2, ε_3, ..., de manière que les nouveaux coefficients

$$\begin{aligned} a_0 - \varepsilon_1 p &= a'_0, \\ \varepsilon_1 + a_1 - \varepsilon_2 p &= a'_1, \\ &\ldots\ldots, \\ \varepsilon_n + a_n - \varepsilon_{n+1} p &= a'_n, \\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

soient tous égaux à 0, 1, 2, ... ou $(p-1)$. La nouvelle suite ainsi obtenue

$$A' = a'_0 + a'_1 p + a'_2 p^2 + \ldots + a'_n p^n + \ldots$$

est *équivalente* à la proposée A. Elle est réduite puisque ses coefficients sont tous positifs ou nuls et inférieurs à p.

4. Si l'on a

$$\begin{aligned} A &= a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots, \\ B &= b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \ldots, \end{aligned}$$

la *somme* $A + B$ et la *différence* $A - B$ de ces deux suites seront par définition les suites réduites, égales respectivement aux deux suivantes

$$(a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1) p + (a_2 \pm b_2) p^2 + \ldots;$$

le *produit* AB, la suite réduite équivalente à

$$a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) p + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) p^2 + \ldots;$$

(1) HENSEL, *Neue Grundlagen*, etc., p. 52.

le *quotient* A : B la suite réduite, unique et bien déterminée C, vérifiant l'égalité

$$A = BC \qquad (p).$$

Ces définitions s'étendent immédiatement au cas où les suites au lieu de commencer chacune par un terme indépendant de p commencent par des termes quelconques de la forme $a_\rho p^\rho$ et $b_\lambda p^\lambda$, par exemple.

On pourra de même être amené à considérer les somme, différence, produit ou quotient de suites non réduites. Les définitions ci-dessus restent intactes. Il faut remarquer toutefois que nous excluons de nos considérations toute division par des suites (non réduites nécessairement) que l'on pourrait faire correspondre à la quantité zéro.

3. C'est d'une manière toute naturelle que l'on est conduit aux suites rationnelles en p. Si l'on écrit, en effet, un nombre entier rationnel positif quelconque A dans un système de numération à base p, l'on obtient, par exemple,

$$(1) \qquad A = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots + a_k p^k,$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_k$ sont des coefficients égaux à 0, 1, 2, ..., ou $p-1$. Sans insister sur la manière, bien connue, d'obtenir les coefficients a_i nous remarquerons que de l'égalité ci-dessus se déduisent les congruences

$$A \equiv a_0 \pmod{p},$$
$$A \equiv a_0 + a_1 p \pmod{p^2},$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$A \equiv a_0 + a_1 p + \ldots + a_{k-1} p^{k-1} \pmod{p^k},$$
$$A \equiv a_0 + a_1 p + \ldots + a_k p^k \pmod{p^{k+1}},$$

dont la dernière se réduit d'ailleurs à une identité.

Soient maintenant A et B deux nombres entiers quelconques positifs

ou négatifs non divisibles par p. On voit que l'algorithme

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} A &= A_0 p + B a_0,\\ A_0 &= A_1 p + B a_1,\\ A_1 &= A_2 p + B a_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ A_{k-1} &= A_k p + B a_k,\\ A_k &= A_{k+1} p + B a_{k+1},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

dans lequel les A_i comme les a_i sont déterminés d'une manière unique, puisque les a_i sont par hypothèse égaux à 0, 1, 2, ... ou $p-1$, permet d'écrire la suite, en général illimitée, de congruences

$$\begin{aligned} A &\equiv B a_0 && (\mathrm{mod}\; p),\\ A &\equiv B(a_0 + a_1 p) && (\mathrm{mod}\; p^2),\\ A &\equiv B(a_0 + a_1 p + a_2 p^2) && (\mathrm{mod}\; p^3),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Afin de résumer ces dernières en une formule unique, l'on introduit une suite de Hensel et l'on écrit

$$\frac{A}{B} = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots \qquad (p).$$

Si, d'autre part, l'on remarque que la première des égalités (2) conduit à la congruence

$$-A \equiv B(p - a_0) \qquad (\mathrm{mod}\, p)$$

dans laquelle $p - a_0$ comme a_0 est égal à 1, 2, ... ou $(p-1)$, l'on écrira immédiatement

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} -A &= -(B + A_0)p + B(p - a_0),\\ -(B + A_0) &= -(B + A_1)p + B(p - 1 - a_1),\\ -(B + A_1) &= -(B + A_2)p + B(p - 1 - a_2),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ -(B + A_{k-1}) &= -(B + A_k)p + B(p - 1 - a_k),\\ -(B + A_k) &= -(B + A_{k+1})p + B(p - 1 - a_{k+1}),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

et partant, la suite également réduite

$$-\frac{A}{B} = (p - a_0) + (p - 1 - a_1)p + (p - 1 - a_2)p^2 + \dots + (p - 1 - a_k)p^k + \dots.$$

Ceci met en évidence une règle fort utile pour passer du développement d'une quantité donnée à celui de la même quantité affectée du signe contraire.

6. *Les suites qui, dans le domaine d'un nombre premier p, correspondent à un nombre rationnel quelconque sont périodiques.*

Soit $\frac{A}{B}$ le nombre rationnel considéré; il suffit, d'après ce qui précède, de supposer A comme B tous deux positifs. Nous excluons aussi le cas où, $\frac{A}{B}$ se réduisant à un entier positif, la périodicité deviendrait évidente.

Des égalités (2) nous déduirons la suivante :

$$(4) \qquad A = B(a_0 + a_1 p + \dots + a_k p^k) + A_k p^{k+1},$$

vraie pour tout indice k, et dans laquelle l'on a nécessairement, à partir de l'un d'entre eux,

$$(5) \qquad -B < A_k < 0.$$

A étant de même que B positif, il ne pourrait, en effet, se faire que, constamment, l'on ait A_k positif. A_k, en outre, ne saurait pour aucun indice k s'annuler, puisque $\frac{A}{B}$ n'est pas entier positif.

Si, d'autre part, l'on avait A_k inférieur ou égal à $-B$, pour k quelconque l'on déduirait de (4)

$$A \leqq B(a_0 + a_1 p + \dots + a_k p^k) - B p^{k+1}$$

et, *a fortiori*,

$$A \leqq B(p - 1)(1 + p + \dots + p^k) - B p^{k+1}, \qquad \text{c'est-à-dire} \quad A \leqq -B,$$

ce qui est contradictoire.

Les inégalités (5) subsistent donc à partir d'un certain indice k. Comme les A_k sont entiers et que l'algorithme (2) se poursuit indéfiniment, il en résulte aussitôt la périodicité de la suite qui correspond à $\frac{A}{B}$.

Le développement d'un nombre rationnel dans le domaine d'un nombre premier p est toujours unique et bien déterminé; dans le cas de A ou de B divisible par p, l'on pose simplement

$$\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'} p^{\alpha},$$

$\frac{A'}{B'}$ représente une fraction dans laquelle ni A′ ni B′ ne sont divisibles par p. Le développement de $\frac{A'}{B'}$, dans lequel chaque terme séparément se trouve multiplié par p^{α}, est alors celui de $\frac{A}{B}$.

On voit également si A, B, C, ... sont des quantités rationnelles, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ les développements qui leur correspondent dans le domaine de p, que toujours l'on a

$$A \pm B = \alpha \pm \beta \quad (p),$$
$$AB = \alpha\beta \quad (p),$$
$$\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\beta} \quad (p),$$

où $\alpha \pm \beta$, $\alpha\beta$, $\frac{\alpha}{\beta}$ sont les somme, différence, produit et quotient obtenus d'après les règles du n° 4, des deux suites α et β.

D'une manière générale, en désignant par $R(A, B, C, \ldots)$ une fonction rationnelle quelconque à coefficients entiers de A, B, C, ... et par $R(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ la suite réduite que l'on obtient en effectuant sur α, β, γ, ... les opérations symbolisées par R, l'on aura

$$R(A, B, C, \ldots) = R(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) \quad (p).$$

La division par zéro est, bien entendu, exclue de toutes les considérations ci-dessus.

7. Pour représenter un développement

$$a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3 + \ldots$$

M. Hensel se sert de la notation

$$a_0 . a_1 a_2 a_3 \ldots .$$

Cette manière d'écrire n'est pas la même que celle que l'on emploie dans un système de numération à base quelconque, mais elle est avantageuse, car les calculs effectués sur des suites de Hensel se font de la même façon que dans le cas de fractions décimales illimitées [1].

Exemple d'*addition :*

Dans le domaine de $p = 5$, on a

$$\begin{array}{r} 6990 = 0,34012 \\ 5661 = 1,21041 \\ \hline 12651 = 1,01104 \end{array} \qquad (5)$$

L'opération se fait exactement comme dans le système de numération de base égale à 5, avec cette seule différence que l'on commence par la gauche au lieu de débuter par la droite.

Exemple de *soustraction :*

$$\begin{array}{r} 3209 = 4,13001 \\ 1137 = 2,20410 \\ \hline 2072 = 2,42130 \end{array} \qquad (5)$$

Lorsque la différence des deux nombres est négative, l'opération se fait de la même manière, mais la suite que l'on obtient se poursuit aussi loin que l'on veut. Exemple :

$$\begin{array}{r} 3209 = 4,13001 \\ 3637 = 2,20401 \\ \hline -\ 428 = 2,4214444444\ldots \end{array} \qquad (5)$$

---

[1] Des exemples, analogues à ceux qui suivent, se trouvent aussi dans le premier paragraphe du Mémoire déjà cité de M. Hensel. *Neue Grundlagen*, etc.

L'opération, telle que nous la représentons ici, équivaut à soustraire de la suite non réduite qui correspond à 3209

$$3209 = 4,130015444444\ldots \qquad (5)$$

la suite qui correspond à 3637.

D'une manière générale, p étant un nombre premier et ρ un exposant entier positif, nul ou négatif quelconque, l'on peut toujours écrire

$$0 = p.p^{\rho} + (p-1)p^{\rho+1} + (p-1)p^{\rho+2} + \ldots. \qquad (p).$$

Pour trouver le développement d'un nombre négatif quelconque, il est avantageux souvent de chercher la suite qui correspond à la même quantité prise positivement et de la soustraire de zéro. Ceci est du reste conforme à la remarque du n° 5.

$$\begin{array}{r} 0 = 5,444444\ldots \\ 428 = 3,023 \\ \hline -428 = 2,421444\ldots \end{array} \qquad (5)$$

Exemple de *multiplication* :

$$\begin{array}{r} 448 = 3,423 \\ 519 = 4,304 \\ \hline 2,3142 \\ 43302 \\ 23142 \\ \hline 232512 = 2,2002442 \end{array} \qquad (5)$$

Exemple de *division* :

Prenons les deux nombres

$$\begin{array}{r} 93316 = 1,3214401 \\ 82 = 2,13 \end{array} \qquad (5)$$

dont le quotient

$$1138 = 3,2041 \qquad (5)$$

est entier.

L'opération se dispose comme suit :

$$\begin{array}{r|l} 1,3214401 & 2,13 \\ \underline{1,441} & \overline{3,2041} \\ 4243401 & \\ \underline{4211} & \\ 32401 & \\ \underline{3032} & \\ 2130 & \\ \underline{213} & \\ \dots & \end{array} \qquad (5)$$

ce qui s'explique en remarquant, après avoir mis le quotient sous la forme $c_0, c_1 c_2 c_3 c_4$, que, d'une manière abrégée, nous n'avons fait qu'écrire les égalités

$$\begin{aligned} &1,3214401 - c_0 \quad .2,13 = 0,4243401, \\ &0,4243401 - 0,c_1 \quad .2,13 = 0,0032401, \\ &0,0032401 - 0,0c_2 \quad .2,13 = 0,0032401, \\ &0,0032401 - 0,00c_3 \; .2,13 = 0,0002130, \\ &0,0002130 - 0,000c_4 .2,13 = 0 \end{aligned} \qquad (5)$$

qui, additionnées membre à membre, donnent bien

$$1,3214401 - c_0 , c_1 c_2 c_3 c_4 .2,13 = 0 \qquad (5).$$

On voit, par suite, que les quantités c_0, c_1, c_2, c_3 et c_4 sont les entiers égaux à 0, 1, 2, 3 ou 4 qui, respectivement, satisfont aux congruences

$$\begin{aligned} 1 &\equiv 2c_0 \\ 4 &\equiv 2c_1 \\ 0 &\equiv 2c_2 \qquad (\text{mod } 5). \\ 3 &\equiv 2c_3 \\ 2 &\equiv 2c_4 \end{aligned}$$

Les règles que nous venons d'exposer en les appliquant à des suites limitées restent les mêmes si celles-ci sont illimitées.

La division d'un nombre par un autre, lorsque le quotient n'est pas entier, se fait comme ci-dessus. C'est d'ailleurs de cette façon qu'on arrivera le plus rapidement au développement d'un nombre rationnel quelconque.

La division de

$$7 = 2,1 \qquad (5)$$

par

$$31 = 1,11 \qquad (5)$$

donne, par exemple, immédiatement

$$\frac{7}{31} = 2,431\,431\,431\ldots. \qquad (5)$$

On a, en effet,

$$\begin{array}{l|l} 2,1 = 2,15\acute{4}\acute{4}\acute{4}\acute{4}\acute{4}\acute{4}\acute{4}\ldots & 1,11 \\ \quad\;\; 2,22 & \overline{2,431\ldots} \\ \hline \qquad \acute{4}2\acute{4}\acute{4}\acute{4}\acute{4}\acute{4}\acute{4}\acute{4}\ldots & \\ \qquad \acute{4}\acute{4}\acute{4} & \\ \hline \qquad\; 3\acute{4}3\acute{4}\acute{4}\acute{4}\acute{4}\acute{4}\ldots & \\ \qquad\; 333 & \\ \hline \qquad\quad 10\acute{4}\acute{4}\acute{4}\acute{4}1\ldots & \\ \qquad\quad 111 & \\ \hline \qquad\qquad \acute{1}2\acute{4}\acute{4}\acute{4}\acute{4}\ldots & \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots & \end{array} \qquad (5)$$

§ 2.

1. Les polynomes que nous rencontrerons le plus souvent dans ce travail seront de la forme

$$P(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_i x^{n-i} + \ldots + A_n,$$

dans laquelle les coefficients

$$A_i = a_{\rho_i} p^{\rho_i} + a_{\rho_i+1} p^{\rho_i+1} + \ldots \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

sont des suites ordonnées suivant les puissances croissantes de p, rationnelles ou entières dans le domaine de p.

Aux polynomes ainsi définis, nous réservons le nom de *polynomes en x*, tandis que par *polynomes entiers* nous entendrons, au contraire, des polynomes dont les coefficients sont des nombres entiers ou rationnels.

2. Deux polynomes en x, $P(x)$ et $Q(x)$ sont dits *égaux*, ce qui s'écrit

$$P(x) = Q(x) \qquad (p),$$

lorsque, si loin que l'on pousse la comparaison, les coefficients des mêmes puissances de x dans $P(x)$ et $Q(x)$ sont identiques. L'égalite de deux polynomes peut s'exprimer aussi et cela revient au même, par une suite illimitée de congruences prises suivant des puissances entières et successives de p s'étendant aussi loin que l'on veut.

Les opérations d'addition, de soustraction, de multiplication et de division de deux ou plusieurs polynomes en x se font d'après les règles ordinaires du calcul; les combinaisons de coefficients qui en résultent, d'après les principes développés (§ **1**, n° **4**).

L'égalité dans le domaine de p peut avoir lieu également lorsque soit l'un, soit les deux polynomes $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynomes entiers.

3. Un polynome en x, $P(x)$, étant donné, il peut se faire qu'il existe deux polynomes en x : $f(x)$, $g(x)$, de degrés respectivement inférieurs à celui de $P(x)$ et tels que l'on ait

$$P(x) = f(x)g(x) \qquad (p).$$

Lorsqu'une pareille décomposition peut se faire, on dit que $P(x)$ est *réductible*, *irréductible* dans le cas contraire. Cette définition qui s'étend naturellement aux polynomes entiers sous-entend les mots *dans le domaine du nombre premier p*.

Un polynome entier réductible au sens usuel l'est aussi dans le domaine de tout nombre premier.

4. Grâce à une remarquable proposition ([1]) due à M. Hensel on peut toujours, à la suite d'un nombre fini d'essais, reconnaître si un polynome en x est ou non irréductible dans le domaine de p. Il est utile que nous établissions un cas particulier de celle-ci.

Soit

$$P(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n,$$

un polynome en x dont nous supposons le coefficient de la plus haute puissance de x égal à l'unité et les autres coefficients entiers dans le domaine de p; s'il existe deux polynomes entiers à coefficients entiers $f(x)$ et $g(x)$ dont le résultant n'est pas divisible par p et tels que la congruence

$$(1) \qquad P(x) \equiv f(x)\, g(x) \pmod{p}$$

soit vérifiée, $P(x)$ sera nécessairement réductible dans le domaine de p.

Nous avons, avant d'aborder la démonstration proprement dite de ce théorème, à rappeler certains faits connus.

Étant donnés deux polynomes entiers de degrés égaux respectivement à m et n

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m,$$
$$g(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n,$$

dont les coefficients sont des nombres rationnels entiers, on peut toujours trouver deux autres polynomes entiers $f_1(x)$ et $g_1(x)$, de même nature que les précédents, de degrés par rapport à x inférieurs respectivement à m et n et tels que, $R(f, g)$ désignant le résultant de f et g, on ait

$$(2) \qquad fg_1 + gf_1 = R(f, g).$$

Cette égalité est une simple conséquence de la suivante (écrite

([1]) Hensel, *Neue Grundlagen, etc.*, § 4, p. 78.

pour $m = 3, n = 2$) :

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & (a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3)x \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & (a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3) \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 & (b_0x^2 + b_1x + b_2)x^2 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & (b_0x^2 + b_1x + b_2)x \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & (b_0x^2 + b_1x + b_2) \end{vmatrix}$$

dont le premier membre est $R(f, g)$.

De (2) on déduit immédiatement, dans le cas où $R(f, g)$ n'est pas divisible par p, l'existence de deux polynomes u et v à coefficients entiers et de même degré respectivement que g_1 et f_1 et tels que la congruence

$$(3) \qquad fu + gv \equiv 1 \pmod{p}$$

soit satisfaite.

Plus généralement comme la non-divisibilité de $R(f, g)$ par p entraîne le même fait pour l'un au moins des deux nombres a_0 et b_0, si W représente un polynome à coefficients entiers, de degré au plus égal à $n + m - 1$, il existera toujours deux autres polynomes U et V, à coefficients égaux à 0, 1, 2, ... ou $(p - 1)$, de degrés respectivement inférieurs à n et m et tels qu'on ait

$$(4) \qquad fU + gV \equiv W \pmod{p}.$$

De (3) on déduit en effet

$$f(uW) + g(vW) \equiv W \pmod{p},$$

ou encore, en désignant par X un polynome quelconque,

$$(5) \qquad f(uW - gX) + g(vW + fX) \equiv W \pmod{p}.$$

Si maintenant nous admettons, pour fixer les idées, que b_0 n'est pas divisible par p, nous pouvons choisir X de manière à avoir

$$uW - gX \equiv U \pmod{p},$$

où U est l'un des deux polynomes dont nous voulons établir l'existence. Pour V, on prendra le polynome défini par

$$eW + fX \equiv V \qquad (\text{mod } p),$$

polynome qui, à cause de (5) et de l'hypothèse relative à W, sera de degré égal ou inférieur à $(m-1)$.

Ceci dit, revenons à la proposition que nous cherchons à établir.

Dire que $P(x)$ est réductible, c'est dire qu'il existe deux polynomes en x, $Q(x)$ et $R(x)$ tels que

$$(6) \qquad P(x) \equiv Q(x)R(x) \qquad (p).$$

Admettons en outre, hypothèse dont on établirait facilement la légitimité, mais qui, dans le cas où nous nous trouvons, sera satisfaite d'elle-même, que $Q(x)$ et $R(x)$ sont de même forme que $P(x)$, c'est-à-dire à coefficients entiers dans le domaine de p, ceux des plus hautes puissances de x se réduisant dans ces deux polynomes à l'unité.

De même qu'on peut écrire

$$P(x) = F(x) + pF_1(x) + p^2F_2(x) + p^3F_3(x) + \ldots$$

où les F, F_1, F_2, F_3, ..., sont des polynomes entiers à coefficients égaux à 0, 1, 2, ..., $(p-1)$, le premier de degré égal à n [degré de $P(x)$], les autres de degrés inférieurs, de même on aura

$$Q(x) = f_0(x) + pf_1(x) + p^2f_2(x) + \ldots,$$
$$R(x) = g_0(x) + pg_1(x) + p^2g_2(x) + \ldots;$$

les f_i et g_i étant de degrés respectivement inférieurs à ceux de f_0 et g_0, mais ayant, comme ces deux polynomes, leurs coefficients égaux à 0, 1, 2, ..., ou $(p-1)$.

Remarquons maintenant que la relation (6) peut être considérée comme équivalente à la suite illimitée de congruences

$$(7) \quad \begin{cases} f_0 g_0 \equiv F & (\text{mod } p), \\ (f_0 + pf_1)(g_0 + pg_1) \equiv F + pF_1 & (\text{mod } p^2), \\ (f_0 + pf_1 + p^2f_2)(g_0 + pg_1 + p^2g_2) \equiv F + pF_1 + p^2F_2 & (\text{mod } p^3), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Il en résulte aussitôt la possibilité de déterminer les polynomes f_i et g_j de manière que, tout en étant du degré voulu et en ayant leurs coefficients égaux à 0, 1, 2, ... ou $(p-1)$, les congruences (7) soient aussi satisfaites.

Si nous prenons, en effet,

$$f_0 = f, \qquad g_0 = g,$$

la première congruence (7) sera toujours vérifiée.

Pour qu'il en soit de même de la seconde, il suffit, chose toujours possible d'après ce que nous avons rappelé et à cause de l'hypothèse sur le résultant faite dans l'énoncé, qu'on ait

$$f_0 g_1 + g_0 f_1 \equiv h_1 + F_1 \qquad (\text{mod}\, p),$$

où h_1 représente le polynome entier, de degré inférieur à n, que définit la congruence

$$F - f_0 g_0 \equiv p h_1 \qquad (\text{mod}\, p^2).$$

Pour que la troisième des congruences (7) ait lieu, il suffit après avoir obtenu le polynome h_2 par le moyen de la relation

$$(F_0 + pF_1) - (f_0 + pf_1)(g_0 + pg_1) \equiv p^2 h_2 \qquad (\text{mod}\, p^3),$$

qu'on ait

$$f_0 g_2 + g_0 f_2 \equiv F_2 + h_2 \qquad (\text{mod}\, p).$$

De même que f_1 et g_1, f_2 et g_2, les autres polynomes f_3 et g_3, f_4 et g_4, etc., se déterminent aisément. Le calcul se poursuit aussi loin qu'on veut.

Le passage de f_i et g_i aux polynomes f_{i+1} et g_{i+1} est d'ailleurs facile. Nous pouvons ici nous dispenser de nous en occuper, d'autant plus qu'un peu plus loin, dans un cas un peu différent, on verra comment il se présente.

$P(x)$ est donc réductible, ce que nous voulions démontrer.

5. De la notion d'irréductibilité, on passe immédiatement à celle de la décomposition d'un polynome en x en ses facteurs irréductibles.

On démontre, de la même manière qu'en Algèbre élémentaire, la proposition suivante.

Tout polynome irréductible, diviseur d'un produit de plusieurs polynomes, divise au moins l'un d'eux.

De là résulte immédiatement, pour les polynomes en x, l'uniformité de la décomposition en facteurs dans le domaine d'un nombre premier p.

6. Plus loin nous aurons l'occasion de rencontrer des polynomes dont les coefficients seront des suites de même nature que celles considérées jusqu'ici, mais qui, au lieu d'être ordonnées suivant les puissances croissantes de p, le seront suivant les puissances de $p^{\frac{1}{s}}$, où s représente un entier positif quelconque.

Au paragraphe **12**, les coefficients des puissances de $p^{\frac{1}{s}}$ ne seront pas des quantités égales à 0, 1, 2, ... ou $(p-1)$, mais des quantités algébriques appartenant à un corps $R(\xi)$ dont le discriminant n'est pas divisible par p. $R(\xi)$ s'obtient par adjonction, aux nombres rationnels, d'une quantité ξ racine d'une équation irréductible à coefficients rationnels $f(x) = 0$.

Montrons dans ce cas, qui d'ailleurs comprend les précédents, comment se fonderait l'algorithme d'Euclide.

Les polynomes que nous considérons :

$$P(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n,$$

ont donc leurs coefficients de la forme

$$A_i = a_{\rho_i} p^{\frac{\rho_i}{s}} + a_{\rho_i+1} p^{\frac{\rho_i+1}{s}} + \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

dans laquelle $a_{\rho_i}, a_{\rho_i+1}, \ldots$ sont des quantités de $R(\xi)$.

Rappelons la définition d'après laquelle une quantité algébrique quelconque ε est entière *par rapport à p*, lorsque les coefficients de l'équation rationnelle de moindre degré, vérifiée par ε, sont tous entiers par rapport à p [1], celui de la plus haute puissance de l'inconnue

[1] Une quantité rationnelle est entière *par rapport à p* lorsque, mise sous forme irréductible, son dénominateur n'est pas divisible par p.

n'étant pas divisible par p. Remarquons aussi que, par extension, on dit que par rapport à p une quantité α est divisible par une autre β, $\beta = p^{\frac{1}{s}}$ par exemple, lorsque le quotient $\frac{\alpha}{\beta}$ est quantité entière par rapport à p, et qu'enfin la divisibilité, ainsi comprise, de $\alpha - \beta$ par $p^{\frac{1}{s}}$ est exprimable par la congruence

$$\alpha \equiv \beta \qquad \left(\bmod p^{\frac{1}{s}}\right).$$

Cela étant, soit r le degré de $f(x) = 0$; dans ce cas, toutes les quantités de $R(\xi)$ sont de la forme

$$u_0 + u_1\xi + \ldots + u_{r-1}\xi^{r-1},$$

dans laquelle les $u_0, u_1, \ldots, u_{r-1}$ sont des quantités rationnelles.

De la non-divisibilité par p du discriminant de $R(\xi)$ résulte alors, comme on sait, l'impossibilité pour une quantité de $R(\xi)$ d'être, par rapport à p, divisible par p sans qu'il en soit de même des coefficients $u_0, u_1, \ldots, u_{r-1}$ qui lui correspondent. On verrait aussi que la même condition doit être vérifiée pour que la même quantité soit, par rapport à p, divisible algébriquement par $p^{\frac{1}{s}}$ (¹).

Une quantité du corps ne peut donc être divisible par $p^{\frac{1}{s}}$ sans l'être par p lui-même. Appelons unités ou plus petits restes, selon le module p, les p^r quantités de $R(\xi)$ pour lesquelles les u_i sont indépendamment les uns des autres égaux à 0, 1, 2, ... ou $p-1$. L'une de ces quantités, celle pour laquelle tous les u_i sont nuls, n'est, à vrai dire, pas une unité, mais cela n'a aucune importance ici.

Soit maintenant

$$A = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 p^{\frac{1}{s}} + \varepsilon_2 p^{\frac{2}{s}} + \ldots$$

une suite dans laquelle tous les coefficients ε_i sont des unités de $R(\xi)$;

(¹) Ceci s'établit immédiatement si, désignant par α une quantité de $R(\xi)$ divisible par $p^{\frac{1}{s}}$ et par $S(\alpha)$ la somme de ses conjuguées, on remarque que $S(\alpha)$ est divisible par p, comme conséquence du fait que, quel que soit l'entier positif k, on a toujours $[S(\alpha)]^{p^k} \equiv S(\alpha^{p^k}) \pmod p$.

nous disons qu'il y aura toujours une autre suite, analogue à A, unique, bien déterminée,

$$B = \eta_0 + \eta_1 p^{\frac{1}{s}} + \eta_2 p^{\frac{2}{s}} + \ldots$$

telle qu'au sens que nous avons toujours donné à de pareilles égalités, on ait

$$AB = 1 \qquad \left(p^{\frac{1}{s}}\right).$$

Si nous supposons ε_0 différent de zéro, la chose est immédiate, car on peut toujours déterminer successivement les unités η_{10}, η_{11}, η_{12}, η_{13}, ..., de manière à avoir

$$\varepsilon_0 \eta_{10} \equiv 1 \pmod{p^{\frac{1}{s}}},$$

$$\left(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 p^{\frac{1}{s}}\right)\left(\eta_{10} + \eta_{11} p^{\frac{1}{s}}\right) \equiv 1 \pmod{p^{\frac{2}{s}}},$$

$$\left(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 p^{\frac{1}{s}} + \varepsilon_2 p^{\frac{2}{s}}\right)\left(\eta_{10} + \eta_{11} p^{\frac{1}{s}} + \eta_{12} p^{\frac{2}{s}}\right) \equiv 1 \pmod{p^{\frac{3}{s}}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ou mieux de manière que les congruences suivant $p^{\frac{1}{s}}$ pris comme module, qui se déduisent successivement de celles-ci, soient toujours vérifiées. Si l'on avait, au contraire,

$$A = \varepsilon_0 p^{\frac{\rho}{s}} + \varepsilon_1 p^{\frac{\rho+1}{s}} + \ldots$$

avec ε_0 et ρ tous deux différents de zéro, ρ quelconque entier positif ou négatif, on aurait

$$B = \eta_{10} p^{-\frac{\rho}{s}} + \eta_{11} p^{\frac{-\rho+1}{s}} + \ldots$$

les unités η_{10}, η_{11}, ... étant déterminées comme ci-dessus.

Si l'on avait deux suites A_0 et B_0 on pourrait trouver une troisième suite C_0 telle que

$$B_0 C_0 = A_0 \qquad \left(p^{\frac{1}{s}}\right).$$

Il suffirait pour cela de prendre la suite B'_0 définie par l'égalité

$$B_0 B'_0 = 1 \qquad \left(p^{\frac{1}{\varsigma}}\right),$$

puis de la multiplier par A_0. Dans $A_0 B'_0$ les coefficients ne sont en général pas des unités. On transforme alors, par un procédé analogue à celui du paragraphe **1**, n° **5**, $A_0 B'_0$ en une suite satisfaisant à cette condition. On aboutit ainsi à C_0. C_0 sera la suite réduite *équivalente* à $A_0 B'_0$; C_0 s'obtient facilement grâce à ce que l'on sait de la divisibilité des nombres de $R(\xi)$ par $p^{\frac{1}{\varsigma}}$.

Ceci dit, soit A_0 le coefficient de x^n dans le polynome $P(x)$ écrit plus haut, B_0 le coefficient de x^m dans le polynome de même nature

$$Q(x) = B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \ldots + B_m;$$

soit en outre $n \geqq m$.

Si nous formons la différence

$$P(x) - C_0 x^{n-m} Q(x),$$

nous obtenons un nouveau polynome en x de degré inférieur ou égal à $n - 1$.

Ceci donne le moyen d'obtenir le quotient et le reste, de degré inférieur à celui de $P(x)$, de la division de $P(x)$ par $Q(x)$, et cela quel que soit le coefficient de la plus haute puissance de x dans $Q(x)$. Il est dès lors possible de fonder l'algorithme d'Euclide pour des polynomes de la nature de ceux que nous venons de considérer. Les conséquences qu'on en déduit sont pour ces polynomes identiques à celles que nous avons énoncées au numéro précédent pour des polynomes dont les coefficients sont des suites rationnelles en p.

§ 3.

1. Pour étudier certaines propriétés des polynomes en x, que souvent nous mettrons sous la forme

$$P(x) = \sum A_{\alpha\beta} p^{\alpha} x^{\beta},$$

il est avantageux d'introduire, en correspondance avec chacun d'eux, une représentation géométrique qui n'est autre que celle de Newton pour les polynomes dépendant de deux variables x et y.

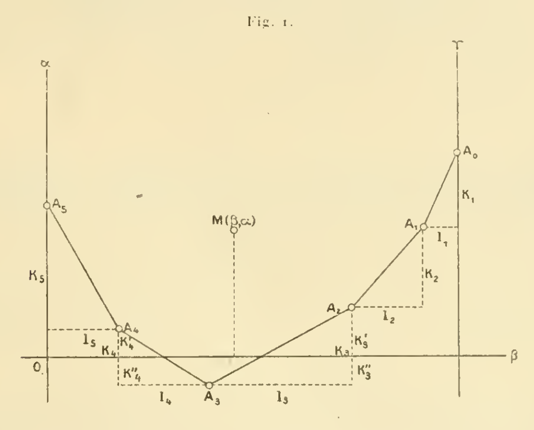
A chaque terme

$$A_{\alpha\beta}\, p^{\alpha} x^{\beta}$$

de $P(x)$ et après avoir choisi dans un plan quelconque deux axes rectangulaires, nous faisons correspondre un point M dit *point représentatif* du terme considéré. L'abscisse et l'ordonnée du point M seront respectivement égales à β et α.

Tous les points correspondant à un polynome $P(x)$ sont situés sur le contour ou au-dessus d'une certaine ligne brisée que nous appellerons *polygone* ou quelquefois *contour* relatif à $P(x)$. Ce polygone s'obtient d'après un procédé connu sur lequel il n'est pas nécessaire de revenir ici (¹). La figure formée par le polygone ainsi défini et par les

Fig. 1.



points situés au-dessus de son contour sera le *diagramme* du polynome considéré.

(¹) *Cf.* par ex. HENSEL et LANDSBERG, *Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln und ihre Anwendung auf algebraische Kurven und Abelsche Integrale*, p. 43 et suivantes.

Au polynome $P(x)$ correspondra, par exemple, le diagramme donné dans la figure 1.

Les points représentatifs d'un quelconque de ses termes seront situés soit sur le contour

$$\gamma A_0 A_1 \ldots A_4 A_5 \alpha,$$

soit à son intérieur. La ligne brisée $A_0 A_1 A_2 \ldots A_5$ peut se réduire à une droite; dans ce cas nous disons que le contour est *rectiligne; brisé* dans le cas contraire.

2. En fixant sur le polygone un sens de circulation positif lorsqu'on va du point A_0 au point A_5 nous serons à même de donner une définition précise de l'*inclinaison* d'un quelconque des côtés. Ce sera la tangente trigonométrique de l'angle formé par la direction positive du côté avec la direction négative de l'axe des abscisses.

Dans la figure 1, par exemple, les côtés $A_1 A_2$ et $A_3 A_4$ sont d'inclinaisons respectivement égales à

$$-\frac{k_2}{l_2} \quad \text{et} \quad +\frac{k_4}{l_4}.$$

Dans la suite, nous poserons toujours, i désignant un indice quelconque,

$$\frac{k_i}{l_i} = \frac{\lambda_i r_i}{\lambda_i s_i} = \frac{r_i}{s_i},$$

$\frac{r_i}{s_i}$ sera l'expression mise sous forme réduite du rapport $\frac{k_i}{l_i}$. Dans le cas de $k_i = 0$, on aura

$$l_i = \lambda_i, \qquad s_i = 1.$$

3. Nous considérons maintenant les diagrammes qui correspondent à deux polynomes donnés $P(x)$ et $Q(x)$ et nous nous demandons quel sera le polygone relatif à leur produit $P(x)Q(x)$.

Soient $A p^\alpha x^\beta$, $A' p^{\alpha'} x^{\beta'}$ deux termes quelconques appartenant l'un à $P(x)$, l'autre à $Q(x)$, leur produit est égal à $AA' p^{\alpha+\alpha'} x^{\beta+\beta'}$, de sorte qu'en groupant entre eux tous les produits analogues pour lesquels la somme des exposants de p est égale à $\alpha + \alpha'$, celle des exposants de x

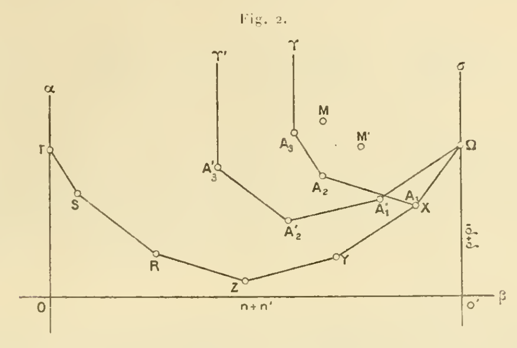
égale à $\beta + \beta'$, on pourra mettre $P(x)Q(x)$ sous la forme

$$P(x)Q(x) = \Sigma L p^{\alpha+\alpha'} x^{\beta+\beta'}.$$

Le coefficient L peut être divisible par p; il ne le sera pas s'il se réduit au seul produit AA', puisque ni A, ni A' ne sont divisibles par p.

Ceci dit, supposons (*fig.* 2) les diagrammes relatifs à P et Q et au

Fig. 2.



produit PQ, rapportés au même système d'axes de coordonnées β, α. Dans la figure, seul le polygone relatif à PQ se trouve ainsi représenté.

Soit Ω son point initial, c'est-à-dire le point de coordonnées $n+n'$, $\rho+\rho'$, si n et n' sont les degrés respectifs de P et Q, ρ et ρ' les exposants des plus petites puissances de p, facteurs de x^n et $x^{n'}$ dans P et Q.

Déplaçons ensuite les diagrammes relatifs à P et à Q parallèlement à eux-mêmes, de façon que les points initiaux de chacun des polygones viennent se confondre en Ω. Les axes restant parallèles, mais leur origine étant en Ω, les coordonnées du point M transporté, représentatif de $A p^\alpha x^\beta$, deviendront respectivement $\beta - n$ et $\alpha - \rho$ et celles de M' transporté, représentatif de $A' p^{\alpha'} x^{\beta'}$, égales à $\beta' - n'$ et $\alpha' - \rho'$. Enfin le point qui, dans le diagramme relatif au produit PQ, avait primitivement $\beta + \beta'$ et $\alpha + \alpha'$ comme coordonnées, restera immobile et admettra maintenant $\beta + \beta' - (n + n')$ comme abscisse, $\alpha + \alpha' - (\rho + \rho')$ comme ordonnée. On en déduit que ce point n'est

pas autre chose que l'extrémité de la résultante des vecteurs ΩM et $\Omega M'$ issus de Ω.

Nos trois diagrammes étant donc superposés comme il vient d'être dit, tout point représentatif de PQ se trouve situé sur une parallèle à l'axe des ordonnées, en coïncidence ou au-dessus de l'extrémité de la résultante de deux vecteurs issus de Ω et se terminant respectivement en deux points représentatifs l'un d'un terme de P, l'autre d'un terme de Q.

Soient maintenant deux systèmes de vecteurs (non représentés dans la figure) : le premier composé de ΩA_1, ΩA_2, ΩA_3, ...; le second de $\Omega A'_1$, $\Omega A'_2$, $\Omega A'_3$, ..., et tels que les deux contours $\Omega A_1 A_2 A_3$, $\Omega A'_1 A'_2 A'_3$... soient concaves du côté des ordonnées positives. Trois vecteurs dans chaque système sont suffisants pour fixer les idées.

Supposons ensuite les vecteurs ΩA_1, $A_1 A_2$, $A_2 A_3$; $\Omega A'_1$, $A'_1 A'_2$, $A'_2 A'_3$ limitant les deux contours ci-dessus, transportés parallèlement à eux-mêmes en Ω, puis composés ensemble par ordre des inclinaisons croissantes. On obtient ainsi la ligne brisée $\Omega XYZRST$ qui jouit des propriétés suivantes :

1° Tous ses sommets à l'exception du premier X s'obtiennent et cela d'une seule façon, par addition géométrique de deux vecteurs appartenant l'un au système $\Omega(A_1 A_2 A_3)$, l'autre au système $\Omega(A'_1 A'_2 A'_3)$. Le premier sommet X s'obtient lui aussi d'une manière unique; il n'est autre chose que l'extrémité du vecteur de moindre inclinaison parmi tous les vecteurs des deux systèmes que nous considérons.

2° M et M' étant deux points situés respectivement à l'intérieur ou sur les côtés des deux figures trapézoïdales $\sigma \Omega A_1 A_2 A_3 \gamma$ et $\sigma \Omega A'_1 A'_2 A'_3 \gamma'$, l'extrémité de la résultante des deux vecteurs ΩM et $\Omega M'$ tombera toujours à l'intérieur ou sur les côtés de la troisième figure trapézoïdale $\sigma \Omega XYZRST\alpha$. Cette extrémité ne pourra, en outre, coïncider avec l'un ou l'autre des sommets Ω, X, Y, ... ou T que si M se confond avec l'un des points Ω, A_1, A_2 ou A_3, et M' avec l'un des points Ω, A'_1, A'_2 ou A'_3.

On voit dès lors, à cause de tout ce qui précède, que, si $\Omega A_1 A_2 A_3$ et $\Omega A'_1 A'_2 A'_3$ sont les polygones respectifs de $P(x)$ et $Q(x)$, $\Omega XYZRST$ sera le polygone de leur produit. Nous avons donc la proposition :

Le polygone relatif au produit de deux polynomes $P(x)$ *et* $Q(x)$

s'obtient en transportant parallèlement à eux-mêmes, en un point quelconque, les côtés des polygones de P(x) *et* Q(x) *construits respectivement sur un même système d'axes rectangulaires et en les composant ensuite géométriquement par ordre des inclinaisons croissantes.*

Cette proposition s'étend immédiatement à un nombre quelconque de facteurs. On peut l'énoncer plus brièvement en disant :

Les polygones relatifs à un produit s'obtiennent par composition géométrique, dans l'ordre des inclinaisons croissantes, des côtés des polygones qui correspondent aux facteurs.

4. Les seuls diviseurs à polygone rectiligne AB que peut admettre un polynome P(x) sont ceux pour lesquels AB est de même inclinaison que l'un ou l'autre des côtés du polygone relatif à P(x). C'est là une conséquence immédiate du théorème qui précède.

§ 4.

1. Soit P(x) un polynome en x, d'ailleurs quelconque, dont nous supposons le polygone brisé et que nous écrivons :

$$P(x) = p^\rho A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n.$$

Les $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des suites quelconques, A'_0 une suite quelconque également mais dont le premier terme est indépendant de p et ne se réduit pas à zéro.

Nous introduisons un nouveau polynome Q(x), défini par l'égalité

$$P(x) = A_0 Q(x) \qquad (p),$$

et remarquons que Q(x) et P(x) ont même polygone.

Supposons, pour fixer les idées, ce polygone donné par la figure 1 du paragraphe **3**. On a, dans ce cas,

$$n = l_5 + l_4 + l_3 + l_2 + l_1,$$
$$\rho = k'_3 + k_2 + k_1,$$

et si nous nous rapportons à ce qui a été dit (§ 3, n° 2), touchant la signification des lettres k_i, l_i, λ_i, r_i, s_i, nous voyons que, dans $Q(x)$, l'ensemble des termes, dont les points représentatifs sont situés sur les côtés du polygone, peut être représenté respectivement par les expressions qui suivent :

Pour $A_0 A_1$ par

$$x^{l_5+l_4+l_3+l_2}[a_1 x^{l_1} p^{k_1} + \ldots + b_1 x^{\lambda_1 - j s_1} p^{\lambda_1 - j r_1} + \ldots + c_1] p^{k_3+k_2},$$

pour $A_1 A_2$ par

$$x^{l_5+l_4+l_3}[a_2 x^{l_2} p^{k_2} + \ldots + b_2 x^{\lambda_2 - j s_2} p^{\lambda_2 - j r_2} + \ldots + c_2] p^{k_3},$$

pour $A_2 A_3$ par

$$x^{l_5+l_4}[a_3 x^{l_3} p^{k_3} + \ldots + b_3 x^{\lambda_3 - j s_3} p^{\lambda_3 - j r_3} + \ldots + c_3] p^{k'_4},$$

pour $A_3 A_4$ par

$$x^{l_5}[a_4 x^{l_4} + \ldots + b_4 x^{\lambda_4 - j s_4} p^{j r_4} + \ldots + c_4 p^{k_4}] p^{-k'_4},$$

pour $A_4 A_5$ par

$$[a_5 x^{l_5} + \ldots + b_5 x^{\lambda_5 - j s_5} p^{j r_5} + \ldots + c_5 p^{k_5}] p^{k'_4}.$$

Dans ces expressions, les coefficients extrêmes a et c sont comme les b égaux à 0, 1, 2, ... ou $p-1$, mais pour eux la valeur zéro est toutefois exclue.

On a, en outre,

$$a_1 = 1;$$

$$c_1 = a_2, \qquad c_2 = a_3, \qquad \ldots, \qquad c_4 = a_5.$$

Les deux exposants k_3 et k'_4 sont égaux, nous écrirons

$$-k_3 = -k'_4 = +k'.$$

Soit maintenant a_i le coefficient du premier terme dans le polynome entre crochets relatif au $i^{\text{ième}}$ côté, a_3 par exemple pour $A_2 A_3$. Nous

prenons le nombre a_3' défini par la congruence

$$a_3 a_3' \equiv 1 \qquad (\bmod p),$$

et formons l'expression

$$f_3(x) = x^{l_3} p^{k_3} + \ldots + b_3' x^{(\lambda_3 - j) s_3} p^{(\lambda_3 - j) r_3} + \ldots + c_3',$$

dans laquelle les coefficients $\ldots, b_3', \ldots, c_3'$ sont les plus petits restes positifs selon le module p des produits $\ldots, a_3' b_3, \ldots, a_3' c_3$.

A chaque facteur entre crochets, à chaque côté par conséquent du polygone relatif à $Q(x)$, correspond ainsi un polynome que nous désignerons par $f_i(x)$ et qui, dans la suite, sera toujours représenté par cette notation-là.

Ceci dit, considérons l'expression

$$A_0' p^{k''} \Pi f_i(x), \; .$$

dans laquelle le produit s'étend à tous les facteurs $f_i(x)$ et où k'' est l'ordonnée du point le plus bas dans le contour relatif à $P(x)$. Construisons le polygone qui lui correspond. On voit, par application du théorème du paragraphe **5** (n° **5**), que ce polynome est identique à celui de $P(x)$, car le polygone relatif à chaque facteur $f_i(x)$ est une droite de même longueur et de même inclinaison que le côté $A_{i-1} A_i$ auquel il se rattache. Si, ensuite, nous comparons, dans $P(x)$ et dans $A_0 p^{k''} \Pi f_i(x)$, ceux des termes dont les points représentatifs sont situés sur le polygone, nous voyons qu'ils sont identiques [1].

Nous pouvons donc mettre $P(x)$ sous la forme

$$(1) \qquad P(x) = A_0 p^{k''} \Pi f_i(x) + \Sigma A_{\alpha\beta} p^\alpha x^\beta,$$

dans laquelle le signe Σ s'étend à des termes dont les points représen-

---

[1] Les coefficients des différentes puissances de x dans $A_0' p^{k''} \Pi f_i(x)$ ne sont à vrai dire pas tous égaux à 0, 1, 2, ... ou $p-1$; il faut, en conséquence, pour la construction du diagramme relatif à cette expression, commencer par développer chacun des coefficients, d'ailleurs positifs, qu'elle renferme suivant les puissances croissantes de p.

tatifs sont situés *au-dessus* du polygone de $P(x)$ et qui, tous, sont par rapport à x de degré *inférieur* à n, le degré de $P(x)$.

2. Reprenons le même polynome $P(x)$, mais admettons que son contour soit rectiligne. Dans ce cas, par application de la formule précédente, nous pourrons écrire

$$(2) \qquad P(x) = A'_0 p^{k''} f(x) + \Sigma A_{\alpha\beta} p^{\alpha} x^{\beta}$$

où $f(x)$ représente un polynome de l'un ou l'autre des deux types

$$x^l p^k + \ldots + b x^{(\lambda-j)s} p^{(\lambda-j)r} + \ldots + c$$

ou

$$x^l + \ldots + b x^{(\lambda-j)s} p^{jr} + \ldots + c p^k,$$

dans lesquels les coefficients b, c ont la même signification que plus haut.

Bornons-nous à considérer l'une de ces deux expressions et supposons $f(x)$ égal à la seconde d'entre elles.

$$f(x) = x^l + \ldots + b x^{(\lambda-j)s} p^{jr} + \ldots + c p^k.$$

Dans ce polynome, faisons la substitution

$$x^s = t p^r,$$

puis divisons le résultat par p^k.

On obtient alors, puisque $l = \lambda s$, $k = \lambda r$, un nouveau polynome que nous pouvons écrire

$$g(t) = t^{\lambda} + \ldots + b t^{\lambda-j} + \ldots + c.$$

Nous admettrons que $g(t)$, décomposé en ses facteurs irréductibles selon le module p, vérifie la congruence

$$g(t) \equiv \Pi [g_i(t)]^{m_i} \qquad (\operatorname{mod} p),$$

dans laquelle

$$g_i(t) = t^{n_i} + \ldots + b_i t^{n_i - j} + \ldots + c_i.$$

Nous pouvons écrire aussi

$$g(t) = \Pi[g_i(t)]^{m_i} + p\,\varphi(t),$$

où $\varphi(t)$ représente un certain polynome de degré inférieur à λ.

Ceci nous conduit à l'égalité

$$f(x) = p^k\,\Pi\left[g_i\left(\frac{x^s}{p^r}\right)\right]^{m_i} + p^{k+1}\,\varphi\left(\frac{x^s}{p^r}\right),$$

qui, à cause de

$$\Sigma n_i m_i = \lambda$$

et après avoir posé

$$p^{n_i r}\,g_i\left(\frac{x^s}{p^r}\right) = \mathrm{G}_i(x),$$

peut s'écrire encore

$$f(x) = \Pi[\mathrm{G}_i(x)]^{m_i} + p^{k+1}\,\varphi\left(\frac{x^s}{p^r}\right).$$

Mais un terme quelconque de

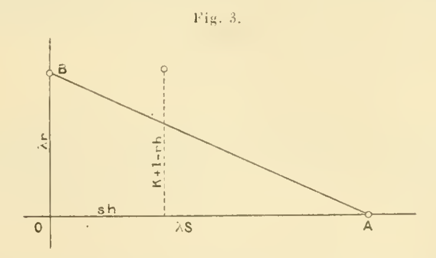
$$p^{k+1}\,\varphi\left(\frac{x^s}{p^r}\right)$$

sera de la forme

$$p^{k+1}\,\mathrm{A}\left(\frac{x^s}{p^r}\right)^h,$$

où $h < \lambda$ et où A est un entier qui peut être divisible par p. Si nous nous reportons (*fig.* 3) au diagramme correspondant à $f(x)$, nous

Fig. 3.



voyons que le point représentatif du terme ci-dessus admet comme abscisse la longueur sh, comme ordonnée une quantité égale ou supé-

rieure à $k+1-rh$. Comme on a

$$\frac{k+1-rh}{(\lambda-h)s} = \frac{(\lambda-h)r+1}{(\lambda-h)s} = \frac{r}{s} + \frac{1}{(\lambda-h)s} > \frac{r}{s},$$

le point considéré se trouve au-dessus de AB.

Les polynomes $G_i(x)$ ont, d'autre part, tous leurs coefficients entiers; leurs contours relativement à p sont rectilignes et de même inclinaison que AB.

Dès lors nous pouvons écrire, tenant compte de (2),

$$(3) \qquad P(x) = A'_0 p^{k''} \Pi [G_i(x)]^{m_i} + \Sigma A_{\alpha\beta} p^\alpha x^\beta.$$

La somme Σ figurant ici dans le second membre ne porte pas sur les mêmes termes exactement que le même signe dans (2). Tout point représentatif d'un terme quelconque $A_{\alpha\beta} p^\alpha x^\beta$ est cependant situé *au-dessus* de la droite qui ici correspond à $P(x)$ et l'exposant β est toujours *au plus* égal à $(n-1)$.

Les lettres A_0 et k' ont même signification que pour le polynome $P(x)$ du n° **1**. Si nous avions supposé $f(x)$ égal au premier des deux types signalés de polynomes, nous serions arrivé, par un raisonnement tout à fait analogue au même résultat.

5. Par combinaison, enfin, des formules (1) et (3) et en représentant les polynomes $G_i(x)$ par la notation $f_{ij}(x)$ dont le but est de rappeler que $f_{ij}(x)$ se déduit de $f_i(x)$ de la même façon que $G_i(x)$ de $f(x)$, nous avons la formule plus générale

$$(4) \qquad P(x) = A_0 p^{k''} \Pi [f_{ij}(x)]^{m_i} + \Sigma A_{\alpha\beta} p^\alpha x^\beta,$$

dans laquelle $P(x)$ est un polynome de la forme considérée au début de ce paragraphe. Sous le signe Σ ne figurent que des termes dont le degré par rapport à x est *au plus* égal à $n-1$ et dont les points représentatifs dans le diagramme de $P(x)$ se trouvent tous *au-dessus* du polygone.

Dernière remarque. — Les facteurs des produits dans les seconds membres de (1), (3) et (4) sont déterminés d'une manière unique.

Cela comme conséquence des propositions qui seront établies (§ 5 et 7).

§ 5.

1. *Tout polynome en x, $P(x)$, à coefficients ordonnés suivant les puissances entières et croissantes de p, dont le polygone n'est pas rectiligne, est nécessairement réductible. A l'un quelconque des côtés du polygone, $A_{i-1}A_i$ par exemple, correspond un diviseur de $P(x)$ dont le polygone se réduit à une droite de même longueur et de même inclinaison que $A_{i-1}A_i$.*

$P(x)$ est un polynome en x quelconque satisfaisant aux conditions de l'énoncé : nous mettons le coefficient de sa plus haute puissance sous la forme $p^\varrho A_0$, A_0 étant une suite de puissances de p, entière par rapport à p. Le premier terme de A'_0 est indépendant de p. Après multiplication de $P(x)$ par la suite $\frac{1}{A_0}$ et après réduction des coefficients, nous obtenons un nouveau polynome $Q(x)$. $P(x)$ et $Q(x)$ admettent des polygones identiques et, si le théorème que nous avons à établir l'est pour $Q(x)$, il le sera *ipso facto* pour $P(x)$.

Nous écrivons

$$Q(x) = p^\varrho x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n$$

et admettons que le polynome de $Q(x)$, respectivement $P(x)$, est celui de la figure 4 (p. 229).

Nous avons par suite, d'après la formule (1) (§ 4, n° 1),

$$(1) \qquad Q(x) = p^{k''}\Pi f_i(x) + \Sigma A_{\alpha\beta}\, p^\alpha x^\beta.$$

La possibilité d'une décomposition en facteurs s'établira relativement au troisième côté, mais la démonstration est générale et se rapporterait à n'importe lequel.

2. Soit

$$\frac{k_3}{l_3} = \frac{k}{l} = \frac{\lambda r}{\lambda s} = \frac{r}{s}$$

l'inclinaison, prise négativement, du troisième côté du polygone.

Parallèlement à ce troisième côté, à A_2A_3 (*fig.* 4), supposons tracées toutes les droites passant par les points à cotes entières. La distance de deux consécutives comptée, sur l'axe des ordonnées, est égale à $\frac{1}{s}$. En effet, β, α et β', α' étant les coordonnées respectives de deux points à cotes entières, la distance de deux parallèles à A_2A_3 menées par ces points est égale à la valeur absolue de

$$(\alpha' - \alpha) + (\beta' - \beta)\frac{r}{s}.$$

Mais r et s sont premiers entre eux et il est ainsi possible de déterminer quatre quantités α', α, β', β telles que l'expression ci-dessus soit égale à $\frac{1}{s}$.

3. A_2A_3, prolongé de part et d'autre, nous donne la droite $\Omega\gamma$ rencontrant $O\alpha$ au point Ω. La parallèle à $\Omega\gamma$ menée par le point représentatif M de coordonnées β et α, rencontre $O\alpha$ en m. Si nous rapportons M aux droites $\Omega\alpha$ et $\Omega\gamma$ que nous prenons comme nouveau système d'axes, nous avons mM comme abscisse et Ωm comme ordonnée, nouvelles de M. Un changement d'unités permet d'écrire $m\mathrm{M} = \beta$, tandis qu'on a, τ_1 désignant un entier positif, $\Omega m = \frac{\tau_1}{s}$.

La figure montre que l'on a

$$Om - O\Omega = \Omega m,$$

c'est-à-dire

$$(2) \qquad \alpha - \beta\frac{r}{s} - \left[k - (l_1 + l_2 + \ldots + l_8)\frac{r}{s}\right] = \frac{\tau_1}{s}.$$

4. Ceci dit, faisons dans $Q(x)$ la substitution

$$(3) \qquad x = y p^{-\frac{r}{s}},$$

et voyons ce que l'on obtient, lorsqu'on forme l'expression

$$Q\left(y . p^{\frac{1}{s}}\right) = p^{-\left[k - (l_1 + \ldots + l_8)\frac{r}{s}\right]} Q\left(y p^{-\frac{r}{s}}\right).$$

Un terme quelconque de $Q(x)$ étant $A_{\alpha\beta} p^{\alpha} x^{\beta}$, celui qui lui correspond dans $Q\left(y, p^{\frac{1}{s}}\right)$, à cause de (2), sera $A_{\alpha\beta} p^{\frac{\gamma}{s}} y^{\beta}$.

Il en résulte qu'avec les conventions du n° 5, nous pouvons considérer $A_0 A_1 \ldots A_s$ comme polygone de $Q\left(y, p^{\frac{1}{s}}\right)$ (¹).

La formule (1) se transforme et devient

$$(4) \qquad Q\left(y, p^{\frac{1}{s}}\right) = \Pi\, g_i\left(y, p^{\frac{1}{s}}\right) + \Sigma A_{\alpha\beta} p^{\frac{\gamma}{s}} y^{\beta}.$$

Les $g_i\left(y, p^{\frac{1}{s}}\right)$ sont égaux respectivement à un facteur, puissance positive ou négative de $p^{\frac{1}{s}}$, près aux $f_i(x)$ transformés par (3). Tous les termes auxquels se rapporte Σ ont leurs points représentatifs situés à l'intérieur du polygone. Sous le signe Σ, par conséquent, tous les exposants γ sont positifs et différents de zéro, les exposants β égaux au plus à $n-1$.

La figure nous dit elle-même ce que sont les facteurs $g_i\left(y, p^{\frac{1}{s}}\right)$. Pour les côtés d'un rang supérieur au troisième, pour le sixième, par exemple, on a

$$g_6\left(y, p^{\frac{1}{s}}\right) = y^{\lambda_6 s_6} + \ldots + b_6 p^{j\frac{\tau}{s}} y^{(\lambda_6 - j)s_6} + \ldots + c_6 p^{\lambda_6 \frac{\tau}{s}},$$

pour les côtés d'un rang inférieur au troisième, pour le second, par exemple, on a

$$g_2\left(y, p^{\frac{1}{s}}\right) = p^{\lambda_2 \frac{\tau}{s}} y^{\lambda_2 s_2} + \ldots + b_2 p^{(\lambda_2 - j)\frac{\tau}{s}} y^{(\lambda_2 - j)s_2} + \ldots + c_2,$$

(¹) Les coefficients des polynomes tels que $Q\left(y, p^{\frac{1}{s}}\right)$ sont des suites ordonnées suivant les puissances croissantes de $p^{\frac{1}{s}}$. Il est à peine nécessaire de remarquer que tous les résultats du § 3 sont encore vrais pour ces polynomes-là. Leurs polygones s'obtiennent de la même façon que ceux du § 3 ; les ordonnées des points représentatifs sont, en particulier, les exposants fractionnaires de p. Ce ne sont pas ici, comme on pourrait s'y attendre, les exposants entiers de $p^{\frac{1}{s}}$.

pour le troisième enfin,

$$g_3\left(y, p^{\frac{1}{s}}\right) = g(y) = y^{\lambda s} + \ldots + b y^{(\lambda-\tau)s} + \ldots + c.$$

Dans ces expressions τ désigne un certain entier positif. Les coefficients b et c sont égaux à 0, 1, 2, ... ou $p-1$; les b peuvent s'annuler, mais les c sont toujours différents de zéro.

5. Le résultant d'un quelconque des polynomes $g_i\left(y, p^{\frac{1}{s}}\right)$, $i \neq 3$, et de $g_3(y) = g(y)$ n'est divisible par aucune puissance de p. Un tel résultant peut être envisagé comme un polynome entier en $p^{\frac{1}{s}}$ admettant un terme indépendant de p. Pour $i = 6$, ce terme indépendant se réduit à $c^{\lambda_6 s_6}$, pour $i = 2$ à $c_2^{\lambda s}$.

6. Posons [1]

$$\prod_{i \neq 3} g_i\left(y, p^{\frac{1}{s}}\right) = \mathrm{G}\left(y, p^{\frac{1}{s}}\right),$$

$$g_3\left(y, p^{\frac{1}{s}}\right) = \mathrm{H}(y),$$

et démontrons qu'il est toujours possible de décomposer, dans le domaine de $p^{\frac{1}{s}}$, $\mathrm{Q}\left(y, p^{\frac{1}{s}}\right)$ en un produit de deux facteurs. On aura

$$\mathrm{Q}\left(y, p^{\frac{1}{s}}\right) = \mathcal{G}'\left(y, p^{\frac{1}{s}}\right) \mathcal{H}'\left(y, p^{\frac{1}{s}}\right) \qquad \left(p^{\frac{1}{s}}\right), \tag{5}$$

où

$$\mathcal{G}'\left(y, p^{\frac{1}{s}}\right) = \mathrm{G}\left(y, p^{\frac{1}{s}}\right) + \Sigma \mathrm{A}_{\alpha\beta} p^{\frac{\alpha}{s}} y^{\beta},$$

$$\mathcal{H}'\left(y, p^{\frac{1}{s}}\right) = \quad \mathrm{H}(y) \quad + \Sigma \mathrm{A}_{\alpha\beta} p^{\frac{\alpha}{s}} y^{\beta}.$$

Les exposants α dans les deux sommes Σ, d'ailleurs distinctes, sont tous positifs et différents de zéro.

Remarquons d'abord que le résultant de H et G se réduit, (n° 5),

---

[1] Toute la démonstration du n° 6 est à rapprocher de celle du § 2, n° 4.

à un polynome entier en $p^{\frac{1}{s}}$, dont le terme indépendant est un entier non divisible par p. Puis convenons, en vue de ce qui va suivre, que toutes les lettres H_i et G_i, affectées d'un indice quelconque, représenteront des polynomes entiers en y dont les coefficients seront eux-mêmes des polynomes entiers en $p^{\frac{1}{s}}$. Les polynomes H_i seront tous de degré inférieur à celui de H, les polynomes G_i de degré inférieur à celui de G.

Ayant maintenant, à cause de (4),

$$Q\left(y, p^{\frac{1}{s}}\right) \equiv HG \qquad \left(\mathrm{mod}\, p^{\frac{1}{s}}\right),$$

nous n'avons, pour établir la décomposition possible de $Q\left(y, p^{\frac{1}{s}}\right)$, qu'à montrer qu'on peut toujours, en supposant $\alpha \geqq 1$, passer de la congruence

$$(6) \qquad Q\left(y, p^{\frac{1}{s}}\right) \equiv H'G' \qquad \left(\mathrm{mod}\, p^{\frac{\alpha}{s}}\right),$$

où

$$H' = H + p^{\frac{1}{s}}H_1 + p^{\frac{2}{s}}H_2 + \ldots + p^{\frac{\alpha-1}{s}}H_{\alpha-1},$$
$$G' = G + p^{\frac{1}{s}}G_1 + p^{\frac{2}{s}}G_2 + \ldots + p^{\frac{\alpha-1}{s}}G_{\alpha-1},$$

à la suivante

$$(7) \quad Q\left(y, p^{\frac{1}{s}}\right) \equiv \left(H' + p^{\frac{\alpha}{s}}H_\alpha\right)\left(G' + p^{\frac{\alpha}{s}}G_\alpha\right) \qquad \left(\mathrm{mod}\, p^{\frac{\alpha+1}{s}}\right).$$

Or, de (6), découle l'existence d'un polynome entier $L(y)$, de degré inférieur à celui de Q, à coefficients entiers, et qui vérifie la congruence

$$Q\left(y, p^{\frac{1}{s}}\right) - H'G' \equiv p^{\frac{\alpha}{s}}L(y) \qquad \left(\mathrm{mod}\, p^{\frac{\alpha+1}{s}}\right),$$

de sorte que (7) aura lieu si l'on peut trouver deux polynomes H_α et G_α de manière à avoir

$$L \equiv H'G_\alpha + G'H_\alpha \qquad \left(\mathrm{mod}\, p^{\frac{1}{s}}\right).$$

Ces derniers existent effectivement ainsi que le montreraient des considérations semblables à celles du paragraphe **2**, n° **4**, puisque le terme indépendant de $p^{\frac{1}{s}}$, dans le résultant de H′ et G′, identique au terme analogue du résultant de H et G, n'est pas divisible par p.

La formule (5) est ainsi démontrée. La forme même du facteur $\mathfrak{K}'\left(y, p^{\frac{1}{s}}\right)$ nous montre que ce polynome admet, comme polygone, une droite de même longueur et de même inclinaison que A_2A_3. Il en résulte aussitôt, en tenant compte du théorème, paragraphe **3** (n° **5**), relatif à la composition des polygones, que celui de $\mathcal{G}'\left(y, p^{\frac{1}{s}}\right)$ sera la ligne brisée $A'_0A'_1A_3A_4\ldots A_8$ dans laquelle les segments $A'_0A'_1$ et A'_1A_3 sont respectivement égaux et parallèles à A_0A_1 et A_1A_2.

7. Dans les deux expressions

$$\mathfrak{K}'\left(y, p^{\frac{1}{s}}\right) \quad \text{et} \quad p^{\left[k'-(l_4+\ldots+l_8)\frac{r}{s}\right]}\mathcal{G}'\left(y, p^{\frac{1}{s}}\right),$$

faisons la substitution inverse de (3),

$$y = xp^{\frac{r}{s}}.$$

Ceci conduit à deux nouveaux polynomes

$$\mathfrak{K}\left(x, p^{\frac{1}{s}}\right) \quad \text{et} \quad \mathcal{G}\left(x, p^{\frac{1}{s}}\right)$$

dont les coefficients sont des suites ordonnées suivant les puissances croissantes de $p^{\frac{1}{s}}$.

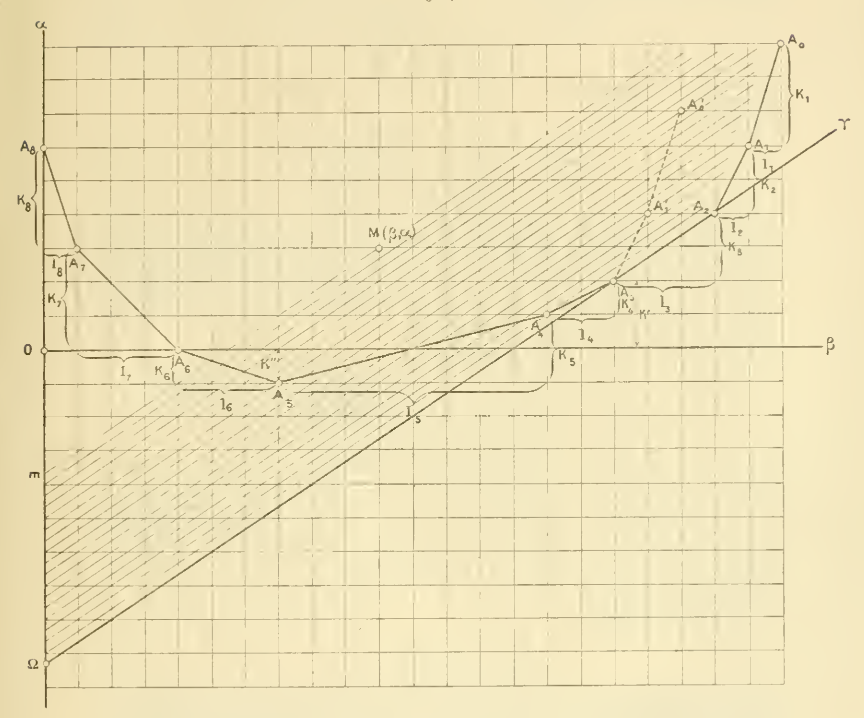
Nous pouvons, relativement à deux axes rectangulaires, construire leurs diagrammes respectifs en convenant de considérer comme point représentatif d'un terme quelconque $A_{\alpha\beta}p^{\frac{\alpha}{s}}x^{\beta}$ le point d'abscisse et d'ordonnée respectivement égales à β et à $\frac{\alpha}{s}$.

Si, pour la construction du diagramme de $\mathcal{G}\left(x, p^{\frac{1}{s}}\right)$ nous nous servons des axes $\beta O \alpha$ de la figure 4, nous obtenons comme polygone de $\mathcal{G}$ la ligne $A'_0A'_1A_3\ldots A_8$.

Le polygone de $\mathcal{K}$ rapporté à d'autres axes rectangulaires se réduit à une droite de même inclinaison et de même longueur que A_2A_3 dans la figure 4.

Il nous est donc possible d'affirmer, paragraphe **5**, n° **4**, que

Fig. 4.



$\mathcal{K}\left(x, p^{\frac{1}{s}}\right)$ et $\mathcal{G}\left(x, p^{\frac{1}{s}}\right)$ n'ont aucun diviseur commun dans le domaine de $p^{\frac{1}{s}}$.

Si, d'autre part, au début de toutes nos considérations nous avions,

au lieu de (3), fait la substitution

$$x = y\omega^{-r} p^{-\frac{r}{s}}$$

dans laquelle ω représente une racine $s^{\text{ième}}$ primitive de l'unité, nous aurions obtenu la relation

$$Q(x) = \mathcal{K}\left(x, \omega p^{\frac{1}{s}}\right) \mathcal{G}\left(x, \omega p^{\frac{1}{s}}\right) \qquad \left(p^{\frac{1}{s}}\right),$$

à la place de celle que nous avons ici et qui résulte de tout ce qui précède,

$$Q(x) = \mathcal{K}\left(x, p^{\frac{1}{s}}\right) \mathcal{G}\left(x, p^{\frac{1}{s}}\right) \qquad \left(p^{\frac{1}{s}}\right).$$

Comme $\mathcal{K}\left(x, \omega p^{\frac{1}{s}}\right)$ et $\mathcal{G}\left(x, \omega p^{\frac{1}{s}}\right)$, ainsi que le montreraient leurs polygones, n'ont pas de diviseurs communs et qu'il en est de même de $\mathcal{K}\left(x, p^{\frac{1}{s}}\right)$ et $\mathcal{G}\left(x, \omega p^{\frac{1}{s}}\right)$, nous avons nécessairement, puisque la décomposition de $Q(x)$ en facteurs irréductibles, dans le domaine de $p^{\frac{1}{s}}$, se fait d'une manière uniforme,

$$\mathcal{K}\left(x, p^{\frac{1}{s}}\right) = \mathcal{K}\left(x, \omega p^{\frac{1}{s}}\right),$$
$$\mathcal{G}\left(x, p^{\frac{1}{s}}\right) = \mathcal{G}\left(x, \omega p^{\frac{1}{s}}\right).$$

Les coefficients dans $\mathcal{K}\left(x, p^{\frac{1}{s}}\right)$ et $\mathcal{G}\left(x, p^{\frac{1}{s}}\right)$, que maintenant nous pouvons désigner par $\mathcal{K}(x)$ et $\mathcal{G}(x)$, ne dépendent donc pas de $p^{\frac{1}{s}}$ mais de p uniquement.

Nous avons donc

$$Q(x) = \mathcal{K}(x)\,\mathcal{G}(x) \qquad (p).$$

Le polygone de $\mathcal{K}(x)$ est rectiligne, il se réduit à un segment de même longueur et de même inclinaison que le segment A_2A_3 de la figure 4. La proposition du début de ce paragraphe se trouve ainsi complètement établie.

8. Si, enfin, nous désignons par $P_i(x)$ le diviseur de $Q(x)$ se

rattachant au $i^{\text{ième}}$ côté du polygone, $\mathfrak{N}(x)$, par exemple, par $P_3(x)$, nous avons immédiatement :

$$Q(x) = p^{k''} \Pi P_i(x) \qquad (p).$$

Le produit du second membre s'étend à tous les diviseurs $P_i(x)$ de $Q(x)$. k'' représente l'ordonnée, prise avec son signe, du point le plus bas du polygone. On a d'autre part

$$P(x) = A'_0 Q(x) \qquad (p).$$

et, par conséquent, la formule

$$(8) \qquad P(x) = p^{k''} A'_0 \Pi P_i(x) \qquad (p).$$

dans laquelle chaque facteur $P_i(x)$ se déduit de $P(x)$ par l'intermédiaire de $Q(x)$.

§ 6.

Considérons le polynome en x

$$P(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_n.$$

dans lequel nous supposerons les coefficients à caractère entier par rapport à p. Si l'on a

$$A_i = a_i p^{\rho_i} + a_{i+1} p^{\rho_i+1} + \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

on aura, par conséquent,

$$\rho_i \geqq 0.$$

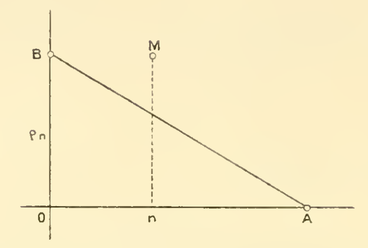
Supposons que $P(x)$ soit irréductible dans le domaine de p. Dans ce cas son polygone se réduit (*fig.* 5) à une droite AB d'inclinaison égale à $\frac{\rho_n}{n}$.

Tout point M représentatif d'un terme de $P(x)$ est alors situé soit

sur AB, soit au-dessus. Le polygone de $P(x)$ conduit ainsi aux inégalités

$$\frac{\rho_i}{i} \geq \frac{\rho_n}{n},$$

Fig. 5.



pour $i = 1, 2, \ldots, (n-1)$. Ce fait important constitue, dans les recherches de M. Hensel, un théorème fondamental [1].

§ 7.

1. Prenons un polynome quelconque $P(x)$ de degré l dont le polygone soit rectiligne et désignons, comme au paragraphe **5**, n° **1**, par $A'_0 p^{\rho}$ le coefficient de la plus haute puissance de x, tandis que k'' sera l'ordonnée du point le plus bas du polygone de $P(x)$.

Nous pouvons alors écrire, après introduction de $Q(x)$,

(1) $$P(x) = p^{k''} A'_0 Q(x).$$

Supposons positive l'inclinaison de la droite qui correspond à $P(x)$; si celle-ci était d'inclinaison négative rien ne serait changé à notre analyse, le résultat auquel nous aboutirons étant d'ailleurs indépendant de cette hypothèse.

$Q(x)$ est alors un polynome en x dont le coefficient de la plus haute puissance de x est l'unité. Son polygone est rectiligne, c'est un segment de droite de même longueur et même inclinaison que celui

---

(1) Hensel, *Ueber eine neue Begründung*, etc. (milieu de la page 15).

qui correspond à $P(x)$. Dans la figure 6 nous l'avons représenté par AB.

Fig. 6.

Ceci dit, $Q(x)$, par application de la formule (3) du paragraphe 4, n° 2, peut, dans l'hypothèse où nous nous plaçons, être mis sous la forme

$$Q(x) = \Pi[G_i(x)]^{m_i} + \Sigma A_{\alpha\beta}\, p^{\alpha} x^{\beta}, \tag{2}$$

dans laquelle les facteurs $G_i(x)$ égaux à des expressions telles que

$$x^{\lambda_i s} + \ldots + b_i x^{(\lambda_i - j)s} p^{jr} + \ldots + c_i p^{\lambda_i r}$$

se déduisent du polynome entier

$$f(x) = x^{l} + \ldots + b x^{(\lambda - j)s} p^{jr} + \ldots + c p^{k}.$$

Certains termes de $Q(x)$ ont leurs points représentatifs sur AB. Leur ensemble constitue le polynome $f(x)$; on a de plus

$$\Sigma \lambda_i m_i = \lambda.$$

Si nous posons

$$x = y p^{\frac{r}{s}}, \tag{3}$$

les $G_i(x)$ se transforment et deviennent

$$p^{\lambda_i r}(y^{\lambda_i s} + \ldots + b_i y^{(\lambda_i - j)s} + \ldots + c_i) = p^{\lambda_i r} g_i(y^s),$$

tandis que de (2), on passe à la nouvelle égalité

$$Q\left(y p^{\frac{r}{s}}\right) = p^{\lambda r}\, S\left(y,\, p^{\frac{1}{s}}\right)$$

dans laquelle

$$(4) \qquad S\left(y,\ p^{\frac{1}{s}}\right) = \Pi[g_i(y^s)]^{m_i} + \Sigma A_{\alpha\beta}\, p^{\frac{\alpha}{s}} y^{\beta}.$$

Sous le signe Σ, dans le second membre de (4), on ne rencontre que des exposants α positifs et différents de zéro. Dans (2), en effet, un terme quelconque de Σ (*fig.* 6) a son point représentatif M au-dessus de AB; son exposant, par conséquent, vérifie l'inégalité

$$\alpha s + \beta r > \lambda r.$$

Reportons-nous ensuite au paragraphe **4**, n° **2**, auquel sont empruntées la plupart des notations dont nous nous servons ici. Les polynomes $g_i(y^s)$ sont en y^s ceux que nous avons appelés $g_i(t)$ de sorte qu'il suffit de remplacer dans les premiers y^s par t pour obtenir les seconds.

Le résultant de deux quelconques des polynomes $g_i(y^s)$ est en conséquence égal à la $s^{\text{ième}}$ puissance du résultant des deux polynomes $g_i(t)$ de mêmes indices et ne peut, de ce fait, être divisible par p, puisque deux expressions $g_i(t)$ n'admettent aucun diviseur commun selon le module p.

On en déduit aussitôt, comme au paragraphe **3**, n° **6**, la possibilité de décomposer $S\left(y,\ p^{\frac{1}{s}}\right)$, dans le domaine de $p^{\frac{1}{s}}$, en un produit de facteurs de la forme

$$[g_i(y^s)]^{m_i} + \Sigma A_{\alpha\beta} p^{\alpha} y^{\beta},$$

d'où nous tirons, dans le domaine de p et par une marche analogue à celle du paragraphe **3**, n° **7**, les diviseurs $R_i(x)$ de $Q(x)$,

$$(5) \qquad R_i(x) = [G_i(x)]^{m_i} + \Sigma A_{\alpha\beta}\, p^{\alpha} x^{\beta}.$$

Ici, comme toujours, dans le second membre de (5), le signe Σ s'étend à des termes dont les points représentatifs sont situés au-dessus de la droite constituant le polygone de $R_i(x)$ et qui s'obtient par la considération seule de $[G_i(x)]^{m_i}$.

Le produit, enfin, des différents facteurs $R_i(x)$ est égal à $Q(x)$.

Nous pouvons donc écrire, à cause de (1), et quelle que soit l'inclinaison du contour rectiligne qui correspond à $P(x)$,

$$P(x) = p^{k''} A'_0 \Pi R_i(x) \qquad (p). \tag{6}$$

2. Chaque facteur $P_i(x)$, dans le second membre de la formule (8) du paragraphe 5, admet un polygone rectiligne. Chacun d'eux est donc décomposable en un produit de facteurs analogues aux polynomes $R_i(x)$. Si donc nous désignons par $P_{ij}(x)$ ces diviseurs des $P_i(x)$, la formule (8) du paragraphe 5 se transformera. Par application de (6) et en remarquant que pour chacun des $P_i(x)$, $k'' = 0$, $A'_0 = 1$, on obtient

$$P(x) = p^{k''} A'_0 \Pi P_{ij}(x) \qquad (p). \tag{7}$$

Le produit s'étend à tous les polynomes $P_{ij}(x)$, diviseurs des $P_i(x)$, diviseurs eux-mêmes de $P(x)$.

Cette relation (7) comprend la formule (6) comme cas particulier. Le polygone de $P(x)$, par conséquent, peut être quelconque. k'' est l'ordonnée de son point le plus bas. A'_0 s'obtient de la manière indiquée au début du paragraphe 5.

Chaque facteur $P_{ij}(x)$, est de l'une des deux formes,

$$(x^{\lambda s} + \ldots + b x^{\lambda - j.s} p^{jr} + \ldots + c p^{\lambda r})^m + \Sigma A_{\alpha\beta} p^\alpha x^\beta$$

ou

$$(x^{\lambda s} p^{\lambda r} + \ldots + b x^{\lambda - j.s} p^{\lambda - j.r} + \ldots + c)^m + \Sigma A_{\alpha\beta} p^\alpha x^\beta,$$

suivant que l'inclinaison du côté auquel il se rattache est positive ou négative. Dans le cas de $m = 1$, le polynome $P_{ij}(x)$ correspondant est irréductible dans le domaine de p, ce qui n'a pas lieu nécessairement lorsque m est supérieur à l'unité.

DEUXIÈME PARTIE.

§ 8.

1. Soit

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

un polynome à coefficients *rationnels* quelconques; par polynome *équivalent à $f(x)$, dans le domaine du nombre premier p*, nous entendons le polynome en x, que l'on obtient en remplaçant, dans $f(x)$, chaque coefficient a_i par son développement suivant les puissances entières et croissantes de p. Ceux-ci s'obtiennent d'après les méthodes exposées dans notre premier paragraphe (§ **1**, n° **7** spécialement).

Si $F(x)$ est, dans le domaine de p, le polynome équivalent à $f(x)$, on aura

$$(1) \qquad f(x) = F(x) \qquad (p),$$

et les diviseurs de $F(x)$ seront dits, par extension, *diviseurs de $f(x)$ dans le domaine de p*. Le diagramme correspondant à $F(x)$ et, dans celui-ci, le polygone, seront désignés également, comme diagramme et polygone de $f(x)$, relativement à p [1].

2. Tout diviseur, au sens usuel, de $f(x)$ est égal dans le domaine

---

[1] Dans toutes ces définitions, nous avons fait intervenir le polynome $F(x)$, équivalent à $f(x)$. Ceci paraît conforme à la nature des choses. S'il ne s'agit d'obtenir que le polygone relatif à $f(x)$, on peut procéder de la manière suivante : Ax^β représentant un terme quelconque de $f(x)$, on prend la puissance entière p^α de p, diviseur exact de A, *par rapport à p*. Le point, d'abscisse β et d'ordonnée α, est alors représentatif de Ax^β. Ces points une fois construits, le polygone se forme de la même manière que pour un polynome en x.

de p, au produit de certains diviseurs irréductibles de $F(x)$. Si

$$\pm \frac{k_i}{l_i} = \pm \frac{\lambda_i r_i}{\lambda_i s_i} = \pm \frac{r_i}{s_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

sont les inclinaisons des m côtés du polygone de $f(x)$ et, si d représente le degré de l'un des diviseurs de $F(x)$ dans le domaine de p, on a nécessairement

$$d = \sum_{i=1}^{m} \mu_i s_i,$$

où μ_i est l'une des quantités $0, 1, 2, \ldots$ ou λ_i. Cela en vertu du théorème du paragraphe **3** (n° **3**).

Nous sommes donc en mesure d'énoncer la proposition :

Un polynome $f(x)$ dont les côtés, dans le polygone qui lui correspond relativement à un nombre premier p, sont d'inclinaison

$$\pm \frac{k_i}{l_i} = \pm \frac{\lambda_i r_i}{\lambda_i s_i} = \pm \frac{r_i}{s_i}$$

ne peut admettre comme diviseurs irréductibles (au sens usuel) *que des diviseurs de degrés égaux respectivement à certaines des sommes*

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i s_i,$$

dans lesquelles μ_i est l'une quelconque des quantités $0, 1, 2, \ldots$ ou λ_i *et où m représente le nombre des côtés du polygone de $f(x)$.*

Les quantités k_i, l_i, λ_i, r_i, s_i ont la signification qui leur a été attribuée au paragraphe **3**, n° **2**. Dans le cas où l'un des côtés est parallèle à l'axe des abscisses ou se confond avec lui, on prendra $\lambda_i = l_i$, $s_i = 1$.

5. Si, en particulier, le polygone relatif à $f(x)$ se réduit à une droite d'inclinaison égale en valeur absolue à

$$\frac{k}{l} = \frac{\lambda r}{\lambda s} = \frac{r}{s},$$

les seuls diviseurs irréductibles que peut admettre $f(x)$ seront de degrés égaux à certains des nombres s, $2s$, $3s$, ..., $(\lambda-1)s$.

Lorsque la fraction $\frac{k}{l}$ est réduite, on a $l=s$. $f(x)$ par conséquent irréductible.

4. Une autre proposition, conséquence immédiate de la précédente et que nous énoncerons simplement, est la suivante :

Si p, p', ..., $p^{(\nu)}$ sont des nombres premiers quelconques et si

$$\sum \mu_i s_i, \quad \sum \mu'_i s'_i, \quad \ldots, \quad \sum \mu_i^{(\gamma)} s_i^{(\gamma)}, \quad \ldots, \quad \sum \mu_i^{(\nu)} s_i^{(\nu)}$$

représentent les sommes qui leur correspondent respectivement, lorsque pour chacun d'eux on construit le polygone correspondant à $f(x)$, seuls les polynomes, dont le degré est susceptible d'être égal, simultanément, à une somme de la forme de chacune des expressions $\sum \mu_i^{(\gamma)} s_i^{(\gamma)}$, pourront être diviseurs de $f(x)$.

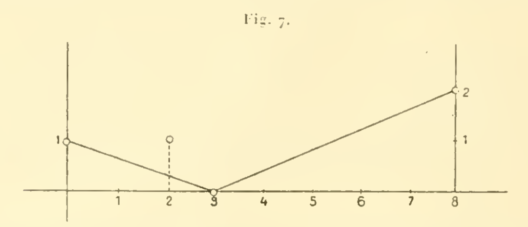
Ce théorème permettra souvent de conclure à l'irréductibilité de certains polynomes, nous allons en donner un exemple.

Soit

$$f(x) = 25x^8 - 3x^3 + 15x^2 + 45,$$

le polygone de $f(x)$, relatif au nombre 5, est donné dans la figure 7,

Fig. 7.

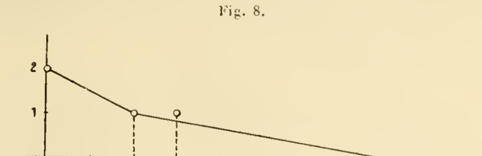


par laquelle on est assuré que, si $f(x)$ est décomposable en facteurs, il ne l'est que comme produit de deux polynomes irréductibles, l'un du cinquième et l'autre du troisième degré.

Relativement au nombre 3, le polygone (*fig.* 8), qui correspond

à $f(x)$, nous montre que $f(x)$ ne peut être égal qu'au produit d'un polynome du sixième degré par un autre du second.

Fig. 8.



Il y a contradiction; $f(x)$ est donc irréductible.

5. Les propositions très générales qui précèdent contiennent, comme cas particuliers, certains théorèmes énoncés déjà, mais d'une manière tout à fait différente, par MM. Kœnigsberger et Netto [1].

§ 9.

1. Par application à $F(x)$ de la formule (7) du paragraphe **7**, n° **2**, on pourrait, dans chaque cas particulier, et d'une manière plus précise que par les considérations ci-dessus, être fixé sur l'irréductibilité de $f(x)$ ou le degré de ses diviseurs.

Nous retenons le plus simple de tous les cas qui peuvent se présenter.

Soit $f(x)$ un polynome à coefficients rationnels, équivalent, dans le domaine de p, au polynome en x

$$F(x) = x^{2s} + ap^r x^s + bp^{2s} + \Sigma A_{\alpha\beta} p^\alpha x^\beta,$$

---

[1] Netto, *Vorlesungen ueber Algebra*, t. I, p. 56 et suiv. — *Ueber die Irreduktibilität ganzzahliger ganzer Funktionen* (*Mathematische Annalen*, t. XLVIII).

Kœnigsberger, *Ueber den Eisenstein'schen Satz von der Irreduktibilität algebraischer Gleichungen* (*Journal de Crelle*, t. 115). — *Ueber die Entwicklungsform algebraischer Funktionen und die Irreduktibilität algebraischer Gleichungen*, 1er Mémoire (*Sitzungsberichte der Kgl. Akad. der Wiss. zu Berlin*, t. II, 1898). *Idem*, 2e Mémoire (*Journal de Crelle*, t. 121).

r et s sont premiers entre eux, b égal à l'une des quantités 1, 2, ... ou $(p-1)$ de même que a, si ce coefficient ne se réduit pas à zéro. $\Sigma A_{\alpha\beta} p^\alpha x^\beta$ représente un ensemble de termes dont tous les points représentatifs sont au-dessus du polygone de $f(x)$ qui, ici, se réduit à une droite d'inclinaison égale à $\frac{r}{s}$.

$f(x)$ sera irréductible, au sens usuel, aussi bien que dans le domaine de p, s'il en est de même, selon le module p, du trinome $t^2 + at + b$. Si $p = 2$, ce dernier se réduit, soit à $t^2 + t + 1$, soit à $t^2 + 1$; dans le premier cas, $f(x)$ est irréductible, mais, dans le second, aucune conclusion n'est possible, puisque

$$t^2 + 1 \equiv (t+1)^2 \pmod 2.$$

Si p, au contraire, est un nombre premier impair, il existera toujours un entier a', vérifiant la congruence

$$2a' \equiv a \pmod p,$$

et l'irréductibilité de $f(x)$ aura lieu chaque fois que $a'^2 - b$ ne sera pas résidu quadratique de p, puisque

$$t^2 + at + b \equiv (t + a')^2 - [(a')^2 - b] \pmod p.$$

Lorsque $a'^2 - b$ est résidu quadratique de p, sans être divisible par p, $f(x)$ est certainement réductible dans le domaine de p, mais il ne l'est peut-être pas au sens usuel.

Si, enfin, $a'^2 - b$ est divisible par p, la congruence ci-dessus se réduit à

$$t^2 + at + b \equiv (t + a')^2 \pmod p,$$

et il pourra très bien se faire que, même dans le domaine de p, $f(x)$ soit irréductible.

2. Soit maintenant $f(x)$ un polynome quelconque et $\varphi(y)$ le polynome qu'on obtient en remplaçant, dans $f(x)$, x par $y + h$, où h représente un entier arbitraire. Les diviseurs irréductibles de $f(x)$ et $\varphi(y)$ se correspondent. Comme souvent le polygone, relatif à $f(x)$, se confond avec l'axe des abscisses, il y aura avantage, si l'on peut

déterminer h de manière à avoir, selon le module p ou suivant une puissance supérieure de p, $f(h) \equiv 0$, à substituer dans les considérations $\varphi(y)$ à $f(x)$.

C'est cette remarque, du reste, qui semble faire le fond de la démonstration d'Eisenstein de l'irréductibilité de l'équation

$$x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + 1 = 0,$$

dans le cas où p se réduit à un nombre premier (¹).

Si, en effet, dans le premier membre de cette équation, nous remplaçons x par $y+1$, nous obtenons un polynome $\varphi(y)$ irréductible, puisque le polynome qui lui correspond se réduit à une droite d'inclinaison $\frac{k}{l} = \frac{1}{p-1}$.

5. Nous appliquerons l'observation ci-dessus en la combinant avec le théorème du paragraphe **8**, n° **4**, pour démontrer l'irréductibilité du polynome

$$f(x) = x^6 - 2x^3 + 28.$$

Le polygone de cette expression est donné, pour le nombre 2, par la

Fig. 9.

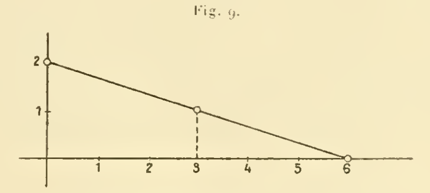


figure 9. Il se réduit à une droite et montre que $f(x)$ ne peut être égal qu'au produit de deux facteurs du troisième degré.

On a, d'autre part,

$$f(1) \equiv 0 \qquad (\text{mod}\, 3^3),$$

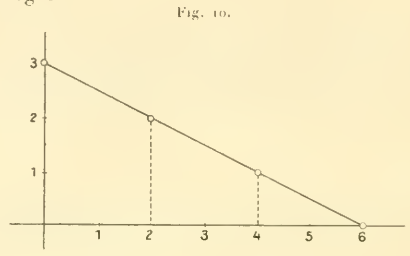
(¹) Eisenstein, *Ueber die Irreduktibilität und einige andere Eigenschaften der Gleichungen von welcher die Teilung der ganzen Lemniskate abhängt* (*Journal de Crelle*, t. 39).

et la substitution $x = y + 1$ transforme $f(x)$ en

$$\varphi(y) = y^6 + 6y^5 + 15y^4 + 18y^3 + 9y^2 + 27.$$

Le polygone de $\varphi(y)$ relatif au nombre 3 est donné par la figure 10. Il se réduit aussi à une droite et fait voir que les diviseurs de $\varphi(y)$, s'ils existent, sont tous du deuxième, ou l'un du deuxième et l'autre du quatrième degré.

Fig. 10.



$f(x)$ est donc irréductible, ce que nous nous proposions d'établir.

§ 10.

1. *Si, dans le polygone correspondant à un polynome $f(x)$ et relatif à un nombre premier p, aucun côté n'a même inclinaison qu'un côté quelconque du polygone correspondant à un autre polynome $g(x)$ et relatif au même nombre premier p, les deux polynomes $f(x)$ et $g(x)$ n'ont,* au sens usuel, *aucun diviseur commun.*

Cette proposition, dans laquelle $f(x)$ et $g(x)$ représentent des polynomes quelconques à coefficients rationnels, est une conséquence immédiate de celle du paragraphe **5**, n° **5**, et comme telle n'a besoin d'aucune démonstration.

2. Le théorème ci-dessus exprime une condition nécessaire pour que deux polynomes admettent un diviseur commun. Celle-ci toutefois n'est pas suffisante, mais voici comment on pourra, lorsqu'elle se vérifie, être fixé, dans la plupart des cas, sur l'existence d'un pareil diviseur.

Soient :

$$f(x) = a_0 p^\rho x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n,$$
$$g(x) = b_0 p^\sigma x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m$$

les deux polynomes à coefficients rationnels que nous considérons et qui, par hypothèse, admettent dans leurs polygones respectifs, relativement à p, certains côtés de même inclinaison. Dans l'expression de chacun d'eux, nous avons mis en évidence la plus haute puissance de p divisant exactement les coefficients de x^n et x^m. a_0 et b_0 ne sont plus divisibles par p.

La formule (4) (§ 4, nº 3) permet d'écrire

$$f(x) = a_0 p^{k_1''} \Pi f_{ij}(x) + \Sigma A_{\alpha\beta} p^\alpha x^\beta \qquad (p),$$
$$g(x) = b_0 p^{k_2''} \Pi g_{ij}(x) + \Sigma A_{\alpha\beta} p^\alpha x^\beta \qquad (p).$$

Si, parmi les polynomes $f_{ij}(x)$, il n'y en a aucun qui soit identique à l'un des polynomes $g_{ij}(x)$, nous sommes assurés que $f(x)$ et $g(x)$ n'ont aucun diviseur commun.

Si le contraire a lieu (ce qui ne peut arriver que pour des f_{ij} et g_{ij} correspondant à des côtés de même inclinaison), $f(x)$ et $g(x)$ pourront admettre un diviseur commun. *Son degré sera au plus égal à la somme des degrés des polynomes identiques, parmi les f_{ij} et g_{ij}.*

Appliquons ceci à un exemple.

5. Supposons que les deux polynomes à coefficients rationnels $f(x)$ et $g(x)$ soient, dans le domaine du nombre premier 5, équivalents respectivement aux deuxièmes membres des relations [1] :

$$f(x) = 0{,}0002\ldots x^8 + 0{,}0002\ldots x^7 + 0{,}02\ldots x^6 + 0{,}03\ldots x^5 + 0{,}03\ldots x^4 + 3,\ldots x^3 + 1,\ldots x^2 + 1,\ldots x + 0{,}01\ldots;$$

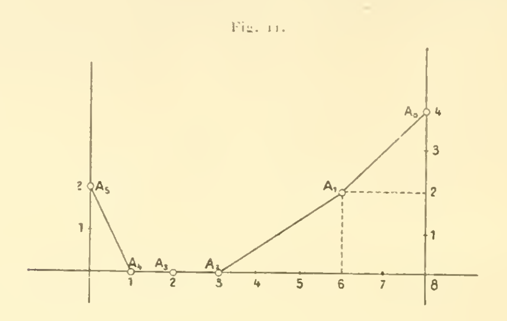
$$g(x) = 0{,}03\ldots x^6 + 0{,}04\ldots x^5 + 0{,}001\ldots x^4 + 3,\ldots x^3 + 4,\ldots x^2 + 0{,}4\ldots x + 0{,}004\ldots.$$

---

(1) Dans les coefficients, écrits suivant la notation de M. Hensel, nous n'indiquons que le premier chiffre parce que seul celui-ci importe pour le but que nous nous proposons.

Les polygones respectifs de $f(x)$ et $g(x)$ sont alors donnés par les figures 11 et 12. Comme dans ceux-ci les côtés A_1A_2 et B_0B_1, A_2A_4 et B_1B_2, A_4A_5 et B_3B_4 ont respectivement même inclinaison, il pourrait se faire que $f(x)$ et $g(x)$ aient, au sens usuel, un plus grand commun diviseur du cinquième degré. Il n'en est rien, cependant.

Fig. 11.

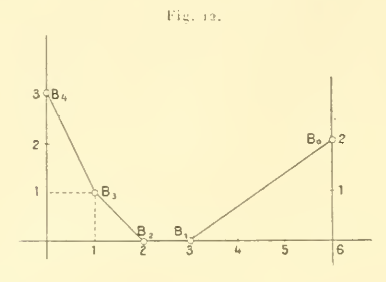


Dans le second membre de $f(x)$, le polynome

$$F(x) = 2.5^4 x^8 + 2.5^2 x^6 + 3x^3 + x^2 + x + 5^2$$

constitue l'ensemble des termes dont les points représentatifs sont

Fig. 12.



situés sur le contour $A_0A_1 \ldots A_5$ du polygone de la figure 11. Nous le remplaçons par le suivant :

$$F_1(x) = 5^4 x^8 + 5^2 x^6 + 4x^3 + 3x^2 + 3x + 3.5^2.$$

obtenu en rendant égal à l'unité le coefficient du terme $5^4 x^8$ dans $F(x)$. Il a fallu pour cela multiplier $F(x)$ par le facteur 3, auquel conduit la congruence

$$2.3 \equiv 1 \pmod 5,$$

puis réduire tous les nouveaux coefficients à leurs plus petits restes selon le module 5.

Relativement à $g(x)$, les polynomes

$$G(x) = 3.5^2 x^6 + 3x^3 + 4x^2 + 4.5x + 4.5^3$$

et

$$G_1(x) = 5^2 x^6 + x^3 + 3x^2 + 3.5x + 3.5^3$$

ont même signification que F et F_1 dans $f(x)$.

Or on peut écrire (§ **4**, n°s **1** et **2**)

$$F_1(x) = (5^2 x^2 + 1)(5^2 x^3 + 4)(x + 3)(x + 4)(x + 5^2) + \Sigma A_{\alpha\beta} 5^\alpha x^\beta,$$
$$G_1(x) = (5^2 x^3 + 1)(x + 3)(x + 5)(x + 5^2) + \Sigma A_{\alpha\beta} 5^\alpha x^\beta,$$

ce qui montre, à cause des deux facteurs $(x+3)$ et $(x+5^2)$, communs à ces deux décompositions, que $f(x)$ et $g(x)$ ont, au plus, un diviseur commun du deuxième degré.

4. La remarque (§ **9**, n° **2**) peut trouver ici son application. C'est ainsi que les deux polynomes :

$$f(x) = x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 27,$$
$$g(x) = x^4 - 12x^3 - 15x^2 + 27$$

n'ont aucun diviseur commun, bien que leurs polygones respectifs relativement au nombre 3 soient identiques. Si, en effet, on remarque que $f(1) = 40$, $g(1) = 1$, on se rend de suite compte qu'après la substitution $x = y + 1$, $f(x)$ se transforme en une expression dont le polygone relativement au nombre 2 est situé au-dessus de l'axe des abscisses, tandis que le polygone de l'expression transformée de $g(x)$ se confond avec cette droite.

§ 11.

1. Soient :

$$f(x) = a_0 p^{\rho} x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n,$$
$$g(x) = b_0 p^{\sigma} x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m,$$

deux polynomes à coefficients rationnels dans lesquels nous avons mis en évidence les puissances de p, facteurs de x^n et x^m; a_0 et b_0 ne sont pas divisibles par p.

Comme conséquence de la formule (8) du paragraphe **5**, n° **8**, nous écrivons :

$$f(x) = a_0 p^{k''_1} \Pi \, P_i(x) \qquad (p),$$
$$g(x) = b_0 p^{k''_2} \Pi \, Q_j(x) \qquad (p),$$

les $P_i(x)$ et $Q_j(x)$ étant les polynomes qui se rattachent à chacun des côtés des polygones de $f(x)$ et $g(x)$, relativement à p. k''_1 et k''_2 sont les ordonnées des points les plus bas.

La notion de résultant de deux polynomes entiers s'étend immédiatement aux polynomes en x. Si donc nous désignons, d'une manière générale, par $R(\varphi, \psi)$ le résultant de deux polynomes quelconques, polynomes en x ou polynomes entiers, φ et ψ, nous avons :

$$(1) \quad \begin{cases} R(f, g) = a_0^m b_0^n p^{mK''_1 + nK''_2} R[\Pi \, P_i(x), \Pi \, Q_j(x)] \\ \qquad = a_0^m b_0^n p^{mK''_1 + nK''_2} \Pi \, R(P_i, Q_j) \qquad (p). \end{cases}$$

Cette formule, dans le deuxième membre de laquelle le produit s'étend à toutes les combinaisons possibles de deux facteurs P_i et Q_j, peut servir au calcul de la puissance de p qui divise exactement le résultant $R(f, g)$ de f et g.

2. Admettons que P_i et Q_j correspondent à deux côtés, d'inclinaisons distinctes, des polygones relatifs à $f(x)$ et $g(x)$. Les polygones de P_i et Q_j sont alors des droites; soient $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ l'ensemble des termes qui, dans chacun d'eux, ont leurs points représentatifs sur

celles-ci. On aura

$$P_i = P = \varphi(x) + \Sigma A_{\alpha\beta} p^\alpha x^\beta \qquad (p),$$

$$Q_j = Q = \psi(x) + \Sigma A_{\alpha\beta} p^\alpha x^\beta \qquad (p),$$

avec $\varphi(x)$ égal à l'un des deux polynomes

$$\varphi'(x) = x^{\lambda s} + \ldots + b x^{(\lambda-j)s} p^{jr} + \ldots + c p^{\lambda r},$$

$$\varphi''(x) = x^{\lambda s} p^{\lambda r} + \ldots + b x^{(\lambda-j)s} p^{(\lambda-j)r} + \ldots + c,$$

et $\psi(x)$ égal à l'un des deux autres polynomes

$$\psi'(x) = x^{\lambda' s'} + \ldots + b' x^{(\lambda'-j)s'} p^{jr'} + \ldots + c' p^{\lambda' r'},$$

$$\psi''(x) = x^{\lambda' s'} p^{\lambda' r'} + \ldots + b' x^{(\lambda'-j)s'} p^{(\lambda'-j)r'} + \ldots + c',$$

les coefficients c et c' n'étant pas divisibles par p. Si l'on a $r = 0$, $s = 1$ dans φ' ou φ'', les résultats auxquels on aboutit subsistent; le signe qu'on attribue à une inclinaison nulle reste d'ailleurs indifférent.

Nous distinguons quatre cas :

Premier cas : $\varphi = \varphi'$, $\psi = \psi'$. — Soit, pour fixer les idées, $\frac{r'}{s'} > \frac{r}{s}$, et faisons, dans P et Q, la substitution $x = y p^{\frac{r}{s}}$. P se transforme alors en $p^{\lambda r} P_1$ où

$$P_1 = y^{\lambda s} + \ldots + b y^{(\lambda-j)s} + \ldots + c + p^{\frac{\varepsilon}{s}} M(y)$$

et Q en $p^{\lambda' s' \frac{r}{s}} Q_1$ où

$$Q_1 = y^{\lambda' s'} + \ldots + b' y^{(\lambda'-j)s'} p^{\frac{j}{s}(r's-s'r)} + \ldots + c p^{\frac{\lambda'}{s}(r's-s'r)} + p^{\frac{\varepsilon'}{s}} N(y).$$

Dans ces deux expressions $M(y)$ et $N(y)$ sont des polynomes en y, dont les coefficients dépendent de $p^{\frac{1}{s}}$. Ceux-ci ne renferment aucune puissance négative de cette quantité; ε et ε' sont deux quantités positives différentes de zéro.

Comme maintenant, d'après la théorie des résultants, on a

$$R\left(p^{\lambda r} P_1, p^{\lambda' s' \frac{r}{s}} Q_1\right) = p^{\lambda r \lambda' s'} R(P, Q) \qquad (p),$$

tandis que, d'autre part,

$$R\left(p^{\lambda r}P_1, p^{\lambda' s' \frac{r}{s}}Q_1\right) = p^{2\lambda r \lambda' s'} R(P_1, Q_1) \qquad (p),$$

on aura

$$(2) \qquad R(P, Q) = p^{\lambda r \lambda' s'} R(P_1, Q_1) \qquad (p).$$

Mais le résultant $R(P_1, Q_1)$ ne peut être qu'une suite à caractère entier de puissances de $p^{\frac{1}{s}}$. Son premier terme est égal à $c^{\lambda' s'}$; on a donc

$$R(P, Q) = c^{\lambda' s'} p^{\lambda r \lambda' s'} + \ldots \qquad (p).$$

$R(P, Q)$, par conséquent, divisible exactement, dans le domaine de p, par $p^{\lambda r \lambda' s'}$: mais ceci suppose l'inégalité $\frac{r'}{s'} > \frac{r}{s}$.

Les trois autres cas se traitent d'une manière analogue.

Deuxième cas : $\varphi = \varphi''$, $\psi = \psi'$. — On trouve

$$R(P, Q) = c^{\lambda' s'} + \ldots \qquad (p).$$

Troisième cas (identique au précédent) : $\varphi = \varphi'$, $\psi = \psi''$.

$$R(P, Q) = c^{\lambda s} + \ldots \qquad (p).$$

Quatrième cas : $\varphi = \varphi''$, $\psi = \psi''$.

$$R(P, Q) = c^{\lambda s} p^{\lambda r \lambda' s'} + \ldots \qquad (p).$$

Ici, comme dans le premier cas, on a par hypothèse $\frac{r'}{s'} > \frac{r}{s}$.

Soient, en conséquence et pour résumer, $P(x)$ *et* $Q(x)$ *deux polynomes en* x, *dont les polygones respectifs sont des droites, d'inclinaisons distinctes, situées, en le touchant, au-dessus de l'axe des abscisses, l'une d'elles pouvant se confondre avec lui; suivant que les deux inclinaisons sont, ou non, de même signe, le résultant de* $P(x)$ *et de* $Q(x)$ *est, ou non, divisible par* p. *Si les deux droites ont des inclinaisons de même signe, représentées respectivement en*

valeur absolue par les rapports

$$\frac{k}{l} = \frac{\lambda r}{\lambda s} = \frac{r}{s} \qquad et \qquad \frac{k'}{l'} = \frac{\lambda' r'}{\lambda' s'} = \frac{r'}{s'},$$

le résultant de $P(x)$ *et* $Q(x)$, *en supposant* $\frac{r'}{s'} > \frac{r}{s}$, *est toujours exactement divisible par* $p^{\lambda r \lambda' s'} = p^{kl'}$.

3. Reste enfin le cas où les deux inclinaisons sont égales, $\frac{r}{s} = \frac{r'}{s'}$.

Le résultant $R(P, Q)$ est alors certainement divisible par $p^{kl'}$; mais il peut l'être aussi par une puissance supérieure.

Si nous nous plaçons dans le premier des cas examinés, P et Q, par la substitution $x = yp^{\frac{r}{s}}$, se transforment et deviennent $p^{\lambda r}P_1$ et $p^{\lambda' r}Q_1$. P_1 est le polynome du premier cas, Q_1 prend la forme

$$Q_1 = y^{\lambda' s} + \ldots + b' y^{(\lambda' - j)s} + \ldots + c' + p^{\frac{\varepsilon'}{s}} N(y).$$

Le résultant de P et Q est divisible par une puissance de p, supérieure à $p^{kl'}$, lorsque le résultant des deux polynomes formés par les termes indépendants de $p^{\frac{1}{s}}$, dans P_1 et Q_1, se trouve divisible par p. Si la chose a lieu, $R(P_1, Q_1)$ dans (2), est alors divisible par une puissance positive de p. Pour l'évaluation exacte de celle-ci, certains termes de $p^{\frac{\varepsilon}{s}}M(y)$ et de $p^{\frac{\varepsilon'}{s}}N(y)$, dans P_1 et Q_1, ceux qui dépendent des plus petites puissances de p, doivent être pris en considération.

Une conclusion analogue s'obtiendrait en partant du quatrième cas.

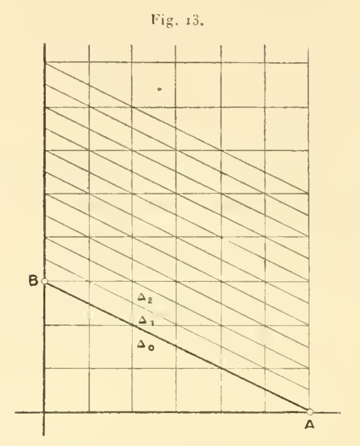
4. Les résultats de ce paragraphe donnent en conséquence le moyen par l'intermédiaire de la formule (1), et par l'examen seul des polygones, de déterminer dans des cas étendus, ressortant de ce qui précède, la puissance de p qui entre exactement dans le résultant de deux polynomes à coefficients rationnels.

§ 12.

1. Supposons un polynome en x, admettant (*fig.* 13), comme po-

lygone une droite AB dont l'inclinaison mise sous forme réduite est égale à $\frac{r}{s}$.

Fig. 13.



On peut alors envisager les points representatifs des termes de tout polynome en x, à coefficients ordonnés suivant les puissances croissantes du même nombre premier p, comme répartis sur des droites parallèles à AB, dont la distance (§ 3, n° 2) comptée sur l'axe des ordonnées est égale à $\frac{1}{s}$.

Nous numérotons ces parallèles à partir de AB et dans l'ordre où elles se présentent nous les appelons Δ_1, Δ_2, Δ_3, ..., en désignant par Δ_0 la droite AB elle-même. Les indices négatifs resteront réservés pour les autres parallèles à AB, situées au-dessous de AB. Enfin, nous introduisons une notation en convenant que des congruences telles que

$$h(x) \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\,\Delta_k),$$
$$h(x) \equiv h'(x) \qquad (\mathrm{mod}\,\Delta_k),$$

dans lesquelles $h(x)$ et $h'(x)$ sont des polynomes en x, signifient que les points représentatifs de $h(x)$, respectivement de $h(x) - h'(x)$, sont situés *sur* Δ_k ou *au-dessus*.

Si $h(x)$ et $h'(x)$, ou seulement l'un de ces deux polynomes, sont *entiers*, la même définition subsiste; mais, dans ce cas, les points représentatifs de $h(x)$ et $h'(x)$ seront, par définition, ceux de leurs polynomes en x équivalents dans le domaine de p.

Soient maintenant $h(x)$ et $g(x)$ deux polynomes entiers, vérifiant, le premier, $h(x)$, la première des congruences ci-dessus, le second, $g(x)$, la suivante

$$g(x) \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\, \Delta_j).$$

Dans ces deux congruences, K et j sont, par hypothèse, aussi grands que possible.

Nous disons alors que $h(x)$ n'est pas divisible par $g(x)$, *le long de* Δ_k, s'il n'y a aucun polynome entier $\varphi(x)$, cas échéant indépendant de x, de manière à avoir

$$h(x) \equiv g(x)\,\varphi(x) \qquad (\mathrm{mod}\, \Delta_{k+1}).$$

$g(x)$ de son côté, sera irréductible, *le long de* Δ_j, s'il est impossible de trouver deux polynomes entiers, de degrés respectivement inférieurs à celui de $g(x)$, $l(x)$ et $r(x)$, donnant lieu à la congruence

$$g(x) \equiv l(x)\,r(x) \qquad (\mathrm{mod}\, \Delta_{j+1}).$$

Nous faisons ces conventions, autant pour simplifier l'énoncé du prochain théorème, que pour mettre en évidence le rapport qui existe entre les congruences, prises par rapport à un nombre premier p, et celles que nous considérons ici. Il suffit, en effet, de supposer (*fig.* 13) que AB se confond avec l'axe des abscisses, pour pouvoir remplacer Δ_k par p^k, dans toute congruence où intervient le module Δ_k.

Ajoutons, enfin, que la figure 13 se rapporte au polynome $f(x)$, dont nous allons nous occuper. AB sera le polygone rectiligne, Δ_0, de $f(x)$, relativement à p. Δ_0 sera la $0^{\text{ième}}$ parallèle à AB, tandis que Δ'_0, le polygone de $g(x)$, serait, dans la même figure, une certaine droite d'indice négatif.

2. Ces préliminaires établis nous avons la proposition [1] :

Soit $g(x)$ un polynome entier qui ne dépend que de x^s, à coeffi-

---

[1] Pour avoir le théorème de Schoenemann (M. Bauer, *loc. cit.*) il suffit de

cients rationnels, susceptible d'être mis sous la forme

$$g(x) = x^{\lambda s} + b_1 x^{(\lambda-1)s} p^r + \ldots + b_j x^{(\lambda-j)s} p^{jr} + \ldots + b_\lambda p^{\lambda r},$$

dans laquelle $b_1, b_2, \ldots, b_\lambda$ *sont des entiers par rapport au nombre premier* p, *le dernier* b_λ *n'étant pas, par rapport à* p, *divisible par* p; *soit* q *un entier positif,* $h(x)$ *un polynome entier, à coefficients rationnels, cas échéant indépendant de* x *et de degré inférieur à* $n = \lambda qs$.

Si cela est, le polynome entier, de degré n, *et dont le polygone, relativement à* p, *est une droite,* Δ_0, *d'inclinaison égale à* $\frac{r}{s}$,

$$f(x) = g^q(x) + h(x), \tag{1}$$

est irréductible, lorsque les conditions suivantes se trouvent réalisées.

a. $h(x) \equiv 0 \pmod{\Delta_\theta}$, θ *étant égal ou supérieur à l'unité et* Δ_θ *la dernière des droites* Δ *entrant dans pareille congruence,*
b. $g(x)$, *irréductible le long de son polygone rectiligne* Δ'_0,
c. $h(x)$, *non divisible par* $g(x)$, *le long de* Δ_θ,
d. le plus grand commun diviseur de q *et* θ, *égal à l'unité,*
e. le discriminant de l'équation $G(y) = 0$, *non divisible par* p, $G(y)$ *étant le polynome entier défini par l'égalité*

$$g\left(y p^{\frac{r}{s}}\right) = p^{\lambda r} G(y).$$

---

supposer que le polygone de $f(x)$ se confond avec l'axe des abscisses, ou, ce qui revient au même, de faire $r = 0$, $s = 1$, dans l'énoncé que nous avons ici. Les conditions a, b, c se transforment alors, conformément à ce que nous avons dit touchant les congruences suivant les lignes Δ_k. Au lieu de a, on aurait

$$h(x) \equiv 0 \pmod{p^\theta}, \quad \ldots,$$

d reste telle quelle et e se trouve satisfaite d'elle-même. Ajoutons qu'en déterminant, comme dans la note du bas de la page 236, directement les points représentatifs des polynomes entiers, on peut donner une autre définition des congruences le long des lignes Δ_k, absolument équivalente à celle que nous avons adoptée. Celle-ci rendrait l'énoncé du théorème indépendant des suites de Hensel.

3. La substitution

$$x = y\,p^{\frac{r}{s}} \tag{2}$$

transforme $g(x)$ en $p^{\lambda r}\,G(y)$ où

$$G(y) = y^{\lambda s} + b_1 y^{(\lambda-1)s} + \ldots + b_j y^{(\lambda-j)s} + \ldots + b_\lambda.$$

A cause de (b) et comme au paragraphe **4**, n° **2**, on verrait que le polynome

$$g'(t) = t^\lambda + b_1 t^{\lambda-1} + \ldots + b_j t^{\lambda-j} + \ldots + b_\lambda,$$

est irréductible selon le module p, irréductible par conséquent au sens usuel. Si donc nous écrivons

$$g'(t) = 0, \tag{3}$$

les racines $t_1, t_2, \ldots, t_\lambda$ de cette équation seront algébriquement conjuguées.

Remarquons toutefois que l'irréductibilité de $g'(t)$ n'entraîne pas nécessairement celle de $G(y)$. On a, par exemple, t^2+t+1 irréductible selon le module 2, alors que

$$y^4 + y^2 + 1 = (y^2 + y + 1)(y^2 - y + 1).$$

4. Mettons en évidence les racines de $G(y)$ et soit

$$G(y) = (y-\xi_1)(y-\xi_2)\ldots(y-\xi_{\lambda s}). \tag{4}$$

Remplaçons $h(x)$ par le polynome en x, $H(x)$ équivalent à $h(x)$ dans le domaine de p.

Décomposons ensuite $H(x)$ en deux parties et écrivons

$$H(x) = h'(x) + h''(x) \qquad (p); \tag{5}$$

$h'(x)$ est le polynome entier formé des termes de $H(x)$ dont les points représentatifs se trouvent sur Δ_0. De tels termes existent toujours à cause de (a). Si dans $H(x)$ nous faisons la substitution (2),

nous obtenons, après division par $p^{\lambda rq+\frac{\theta}{s}}$, en correspondance avec (5), la relation

$$(6) \qquad H\left(y, p^{\frac{1}{s}}\right) = H'(y) + p^{\frac{\varepsilon}{s}} H''\left(y, p^{\frac{1}{s}}\right) \qquad \left(p^{\frac{1}{s}}\right),$$

dans laquelle H et H'' sont des polynomes en y, dont les coefficients à caractère entier dépendent de $p^{\frac{1}{s}}$, $H'(y)$ un polynome entier, à coefficients égaux à 1, 2, ..., ou $(p-1)$ et ε un exposant entier, positif et différent de zéro. L'exposant $\lambda rq + \frac{\theta}{s}$, que nous venons de rencontrer, provient de ce que la substitution (2), effectuée sur un terme $A p^{\alpha} x^{\beta}$ dont le point représentatif se trouve sur la droite $\Delta_{\theta+\varepsilon}$, transforme celui-ci en $A p^{\lambda rq + \frac{\theta+\varepsilon}{s}} y^{\beta}$.

Si $h(x)$ était divisible par $g(x)$, le long de Δ_{θ}, il existerait un polynome entier $\varphi(x)$, tel que la congruence

$$h'(x) \equiv g(x)\varphi(x) \qquad (\bmod \Delta_{\theta+1})$$

soit vérifiée. On en déduirait aussitôt, par l'intermédiaire de (2), l'existence d'un polynome entier, $\Phi(y)$, susceptible en même temps que $\varphi(x)$ de se réduire à une constante, et tel qu'on ait

$$H'(y) \equiv G(y)\Phi(y) \qquad (\bmod p).$$

La réciproque est vraie également.

L'hypothèse (c) entraîne donc, avec elle, l'existence de deux polynomes entiers $\sigma(y)$ et $\tau(y)$, à coefficients entiers, vérifiant la congruence

$$H'(y)\sigma(y) + G(y)\tau(y) \equiv 1 \qquad (\bmod p).$$

On a donc, à cause de (4),

$$H'(\xi_i)\sigma(\xi_i) \equiv 1 \qquad (\bmod p), \qquad (i = 1, 2, \ldots, \lambda s),$$

d'où résulte, $H'(\xi_i)$, non divisible algébriquement par aucune puissance entière ou fractionnaire de p. Le premier terme du développement de $H\left(\xi_i, p^{\frac{1}{s}}\right)$, suivant les puissances croissantes de $p^{\frac{1}{s}}$, sera donc, par suite de (6), différent de zéro et indépendant de $p^{\frac{1}{s}}$.

5. Une première conséquence de (e), c'est le fait que les résultants des polynomes tels que

$$(y-\xi_i)^q \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{G(y)}{y-\xi_i}\right)^q$$

ne sont divisibles algébriquement par aucune puissance entière ou fractionnaire de p.

6. L'égalité (1) conduit à l'équivalence

$$(7) \qquad F(x) = g^q(x) + H(x) \qquad (p).$$

$H(x)$ représente, comme plus haut, le polynome équivalent à $h(x)$; $F(x)$ le polynome équivalent à $f(x)$, dans le domaine de p.

Appliquée à (7), la substitution (2) transforme cette équivalence en une nouvelle,

$$(8) \qquad F\left(y, p^{\frac{1}{s}}\right) = [G(y)]^q + p^{\frac{\theta}{s}} H\left(y, p^{\frac{1}{s}}\right) \qquad \left(p^{\frac{1}{s}}\right).$$

Or ici, de par le n° 5 et parce que les suites en $p^{\frac{1}{s}}$, coefficients des polynomes qui s'introduisent dans la décomposition en facteurs, effectuées comme au paragraphe 5, n° 6, sont du type considéré (§ 2, n° 6), nous sommes assurés que $F\left(y, p^{\frac{1}{s}}\right)$ est réductible dans le domaine de $p^{\frac{1}{s}}$.

On pourra toujours mettre $F\left(y, p^{\frac{1}{s}}\right)$ sous la forme

$$(9) \qquad F\left(y, p^{\frac{1}{s}}\right) = R_i\left(y, p^{\frac{1}{s}}\right) S_i\left(y, p^{\frac{1}{s}}\right) \qquad \left(p^{\frac{1}{s}}\right),$$

où

$$(10) \qquad \begin{cases} R_i\left(y, p^{\frac{1}{s}}\right) = (y-\xi_i)^q + p^{\frac{\theta}{s}} H_i\left(y, p^{\frac{1}{s}}\right), \\ S_i\left(y, p^{\frac{1}{s}}\right) = \left(\frac{G(y)}{y-\xi_i}\right)^q + p^{\frac{\theta}{s}} K_i\left(y, p^{\frac{1}{s}}\right). \end{cases}$$

ξ_i est une racine quelconque de l'équation $G(y) = 0$, H_i et K_i des

polynomes en y, dont les coefficients égaux à des suites telles que

$$\varepsilon_0^{(i)} + \varepsilon_1^{(i)} p^{\frac{1}{s}} + \varepsilon_2^{(i)} p^{\frac{2}{s}} + \ldots$$

sont tous à caractère entier. Les $\varepsilon_0^{(i)}$, $\varepsilon_1^{(i)}$, ... sont tous des entiers algébriques, par rapport à p, du corps $R(\xi_i)$. θ, enfin, est toujours la même quantité, celle dont il est question dans (a).

Supposons maintenant l'équation $G(y) = 0$ irréductible; puis considérons le corps normal ou de Galois que l'on obtient par adjonction de toutes les racines ξ_1, ξ_2, ..., $\xi_{\lambda s}$ au domaine des nombres rationnels. A cause de (e), le discriminant de ce corps n'est pas divisible par p.

Si donc α_ρ, $\alpha_{\rho+1}$, ... représentent, par rapport à p, des unités de ce dernier, la décomposition de $F\left(y, p^{\frac{1}{s}}\right)$ en un produit de polynomes en y, irréductibles, et dont les coefficients seraient des suites telles que

$$\alpha_\rho p^{\frac{\rho}{s}} + \alpha_{\rho+1} p^{\frac{\rho+1}{s}} + \ldots.$$

se ferait (§ **2**, n° **6**) d'une manière uniforme.

De ce dernier type sont aussi les coefficients, mis sous forme réduite, des polynomes R_i; on peut du moins les envisager comme tels. Deux quelconques des polynomes R_i n'ont, en outre, aucun diviseur commun (puisque les racines ξ_i sont toutes distinctes); ils sont, d'autre part, tous diviseurs de $F\left(y, p^{\frac{1}{s}}\right)$ et la somme de leurs degrés respectifs est égale à celui de ce polynome. Nous avons donc ce que nous voulions obtenir,

$$(11) \qquad F\left(y, p^{\frac{1}{s}}\right) = \prod_{i=1}^{\lambda s} R_i\left(y, p^{\frac{1}{s}}\right).$$

Si l'équation $G(y) = 0$ n'est pas irréductible, la même conclusion subsiste. On le voit facilement et sans avoir à modifier, pour ainsi dire, les quelques remarques qui précèdent.

7. Donnons à i, pour fixer les idées, une valeur particulière $i = 1$

et remarquons que de (8) on déduit

$$F\left(\xi_1, p^{\frac{1}{s}}\right) = p^{\frac{\theta}{s}} H\left(\xi_1, p^{\frac{1}{s}}\right) \qquad \left(p^{\frac{1}{s}}\right),$$

et, par conséquent, à cause de (10) et (11),

$$H\left(\xi_1, p^{\frac{1}{s}}\right) = H_1\left(\xi_1, p^{\frac{1}{s}}\right) \prod_{i=2}^{\lambda.s} R_i\left(\xi_i, p^{\frac{1}{s}}\right) \qquad \left(p^{\frac{1}{s}}\right).$$

Si l'on ordonnait le produit suivant les puissances croissantes de $p^{\frac{1}{s}}$, la suite qu'on obtiendrait commencerait par un terme différent de zéro, non divisible par $p^{\frac{1}{s}}$. On sait (n° 4) qu'il en est de même de $H\left(\xi_1, p^{\frac{1}{s}}\right)$.

$H_1\left(\xi_1, p^{\frac{1}{s}}\right)$ et, d'une manière générale, les expressions $H_i\left(\xi_i, p^{\frac{1}{s}}\right)$ jouissent donc de cette même propriété.

8. Remplaçons maintenant dans R_i, y par $z + \xi_i$. On obtient alors un nouveau polynome que l'on peut écrire

$$R'_i\left(z, p^{\frac{1}{s}}\right) = z^q + p^{\frac{\theta}{s}} H_i\left(\xi_i, p^{\frac{1}{s}}\right) + p^{\frac{\theta}{s}} z^{\varepsilon} H'_i\left(z, p^{\frac{1}{s}}\right),$$

où H'_i représente un certain polynome en z, dont les coefficients, suites ordonnées suivant les puissances de $p^{\frac{1}{s}}$, sont tous à caractère entier. ε est un entier positif différent de zéro.

En vertu de ce que nous venons de voir relativement à $H_i\left(\xi_i, p^{\frac{1}{s}}\right)$ le polygone, construit en portant en abscisses les exposants de z et en ordonnées ceux de $p^{\frac{1}{s}}$, devient une droite d'inclinaison $\frac{\theta}{q}$, fraction réduite à cause de (d).

On en déduit aussitôt, par application du théorème du paragraphe **3**, n° **3**, ou par extension de celui du paragraphe **8**, n° **3**, l'irréductibilité de R'_i, dans le domaine de $p^{\frac{1}{s}}$; par suite, celle aussi de chacun des diviseurs R_i.

9. Soient maintenant $d(x)$ un diviseur de $f(x)$, $D(x)$ le polynome équivalent à $d(x)$ dans le domaine de p. $D(x)$ est alors diviseur de $F(x)$ et, comme tel, on pourra écrire

$$D(x) = x^{\lambda' s} + \ldots + b x^{(\lambda' - j)s} p^{jr} + \ldots + c p^{\lambda' r} + \Sigma A_{\alpha\beta} p^{\alpha} x^{\beta},$$

où

$$\lambda' = \lambda q,$$

et où $\Sigma A_{\alpha\beta} p^{\alpha} x^{\beta}$ représente l'ensemble des termes de $D(x)$ dont les points représentatifs sont situés au-dessus du contour, rectiligne également, relatif à ce polynome. Les coefficients $b, \ldots, c$ sont égaux à $0, 1, 2, \ldots,$ ou $(p-1)$, le dernier d'entre eux c étant d'ailleurs différent de zéro.

La substitution (2), effectuée dans $D(x)$, conduit après simplification par $p^{\lambda' r}$ à

$$D\left(y, p^{\frac{1}{s}}\right) = y^{\lambda' s} + \ldots + b y^{(\lambda' - j)s} + \ldots + c + p^{\frac{\varepsilon}{s}} D'\left(y, p^{\frac{1}{s}}\right),$$

où D' est, comme toujours, un polynome dont les coefficients sont à caractère entier. ε est une quantité positive différente de zéro.

Mais $D\left(y, p^{\frac{1}{s}}\right)$ est diviseur de $F\left(y, p^{\frac{1}{s}}\right)$, et, comme tel, égal au produit d'un certain nombre de facteurs R_i. La forme même de $D\left(y, p^{\frac{1}{s}}\right)$ nous montre que ce produit doit être susceptible de s'écrire

$$\prod \left[(y^s - t_j)^q + p^{\frac{\theta}{s}} T(y)\right].$$

Les t_j sont racines de l'équation (3) et le signe Π doit être étendu à certains des indices $j = 1, 2, \ldots, \lambda$. $T(y)$ est encore un polynome en y, dont les coefficients sont, comme toujours, à caractère entier.

Les suites qui multiplient, dans $D\left(y, p^{\frac{1}{s}}\right)$, les différentes puissances de y, suites que nous représentons par $\Sigma \alpha_i p^{\frac{i}{s}}$, ont d'autre part leurs coefficients α_i tous rationnels. Pour que cela ait lieu, il faut que le produit ci-dessus s'étende à tous les indices $j = 1, 2, \ldots, \lambda$.

On a donc $\lambda' = \lambda q$, $d(x)$ par conséquent de même degré, $\lambda s q = n$, que $f(x)$ dont l'irréductibilité est ainsi démontrée.

Théorie des probabilités continues;

PAR M. LOUIS BACHELIER.

Les formules discontinues dont il est fait usage dans la théorie élémentaire des épreuves répétées présentent de grands inconvénients.

Dans les cas les plus simples relatifs à ces probabilités discontinues, on obtient facilement des formules donnant la solution des divers problèmes; mais, comme ces formules contiennent des factorielles, leur calcul devient impraticable quand le nombre des épreuves n'est pas très petit.

Dès que les données d'un problème se compliquent, sans cependant que le problème change de nature, il devient de plus en plus difficile de trouver une formule qui en exprime la solution. Deux formules relatives à deux problèmes de même nature peuvent être apparemment très différentes; il est cependant évident que, le nombre des épreuves devenant très grand, les solutions des deux problèmes doivent être représentées par des mêmes formules ne différant que par des coefficients.

Enfin les formules discontinues ne sont pas expressives, elles ne donnent aucune idée des lois de la variation des probabilités avec le nombre des épreuves.

Ces inconvénients sont si évidents que depuis longtemps on emploie, pour la théorie des épreuves répétées et pour le problème le plus

simple de la théorie du jeu, des formules approchées qui sont continues et expressives, qui conduisent à des calculs simples et qui donnent une idée très nette de la variation des probabilités avec le nombre des épreuves. Ces formules que l'on déduit des formules discontinues ont toujours été considérées comme approchées et c'est pour cette raison que leur usage est resté très limité.

Des formules approchées ne peuvent servir de point de départ pour de nouvelles recherches et c'est pourquoi l'emploi des formules continues ne s'est aucunement étendu depuis Laplace

Les problèmes que l'on s'était posés ne pouvant admettre comme solution exacte que des formules discontinues, l'idée de considérer les probabilités comme continues *a priori* fut envisagée seulement il y a quelques années lorsqu'on se proposa de résoudre des problèmes analogues mais dont les solutions exactes devaient être nécessairement continues.

La théorie édifiée alors était relativement particulière, il fallait la généraliser de façon qu'elle comprît les résultats connus avec beaucoup d'autres, il fallait aussi établir la classification des différents problèmes d'après leurs caractères réels et pour cela, si possible, les considérer tous comme des cas particuliers d'un seul genre de questions; il fallait enfin traiter ces questions en admettant *a priori* la continuité.

Pour satisfaire à cette dernière condition, nous supposerons une suite d'épreuves en nombre très grand, de telle sorte que la succession de ces épreuves puisse être considérée comme continue et que chaque épreuve puisse être considérée comme un élément.

S'il s'agit d'un très grand nombre μ d'épreuves, on peut supposer que celles-ci se suivent à intervalles de temps infiniment petits égaux et considérer la variable μ comme représentant le temps total.

Cette assimilation fournit une image précieuse qui fait concevoir la transformation des probabilités dans une suite d'épreuves comme un phénomène continu.

Pour montrer l'extrême avantage de cette conception, il n'est pas nécessaire de faire connaître les résultats qu'elle a permis d'obtenir, il suffit de considérer la simple définition de la probabilité.

La somme des probabilités de tous les cas possibles a pour valeur m, c'est une conséquence immédiate de la définition. La considération des probabilités continues et la notion du temps donnent à ce principe stérile une forme en quelque sorte animée qui fait naître dans l'esprit une foule d'assimilations : la probabilité est une sorte de matière, d'énergie, ... de chose qui se transforme, mais qui jouit de la propriété de la conservation dans le temps.

La théorie des probabilités continues présente ainsi de grandes analogies avec certaines théories de la Physique mathématique, analogies qu'il est même possible de préciser dans certains cas.

La variable qui représente un nombre d'épreuves peut donc être considérée comme exprimant le temps, mais cette assimilation, si elle est avantageuse, n'est pas nécessaire et c'est pourquoi, dans la suite de cette étude, il n'y sera pas fait allusion.

Afin d'obtenir l'unité indispensable pour la classification des différents problèmes, nous ramènerons ceux-ci à un seul type en supposant toujours qu'ils se rapportent à un jeu.

Lorsqu'un problème n'est pas explicitement relatif à un jeu, on peut le considérer comme le cas particulier d'un problème relatif à un jeu. Sans chercher la preuve de ce principe dans la suite de cette étude, il suffit de remarquer que si, dans un problème, il s'agit par exemple uniquement des probabilités p_1, p_2, ... on augmente la généralité de ce problème en supposant qu'à chacune des probabilités corresponde un gain ou une perte α_1, α_2, ... Le problème proposé n'est que le cas particulier pour lequel $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = 1$.

La théorie des probabilités continues pour être générale devra donc être une théorie générale du jeu.

Nous imaginerons un jeu fictif, continu, tel que, s'il doit être joué μ parties, les gains ou les pertes des joueurs soient supposés continus. Les probabilités correspondantes s'exprimeront par des fonctions continues et enfin la quantité μ sera continue elle-même.

Lorsque nous parlerons de la $\mu^{\text{ième}}$ et de la $(\mu+1)^{\text{ième}}$ partie [ou de la $\mu^{\text{ième}}$ et de la $(\mu+1)^{\text{ième}}$ épreuve], il faudra entendre que dans le second cas μ est remplacé par $\mu + d\mu$.

Ce que nous appellerons *les conditions du jeu pour une partie*, ce sera l'ensemble des variations possibles des gains ou des pertes des joueurs entre μ et $\mu + d\mu$.

Pour bien comprendre la continuité de la quantité μ, il suffit de la considérer comme désignant le temps; nous l'avons déjà remarqué.

On conçoit aisément les avantages que l'on peut tirer de la considération de ce jeu fictif : sa théorie est absolument indépendante de celle des probabilités discontinues; elle est mathématiquement exacte et ne procède ni par approximations, ni par tâtonnements; elle permet, pour toutes les questions, l'emploi du calcul infinitésimal; ses formules sont simples et expressives, et absolument générales.

Les problèmes dont s'occupe cette théorie se succèdent dans un ordre logique, d'après une classification méthodique; les calculs qu'ils nécessitent sont simples et leurs résultats peuvent presque toujours se traduire immédiatement en chiffres par les Tables de Kramp.

En résumé, les principes qui servent de base à cette étude peuvent se ramener à deux conceptions : la supposition de la continuité et la réduction de toutes les questions à un type unique.

Classification des probabilités.

1. Les conditions du jeu peuvent être identiques dans chaque élément $d\mu$ ou, si l'on veut, à chaque partie, on dit alors que le jeu est uniforme ou qu'il y a *uniformité*.

Les conditions peuvent être variables d'une partie à l'autre suivant une loi donnée d'avance dépendant uniquement du rang occupé par cette partie et indépendante des faits antérieurs à cette partie. On dit alors qu'il y a *indépendance*.

Lorsque les conditions relatives à un élément $d\mu$ ou, si l'on veut, à la $\mu^{\text{ième}}$ partie dépendent des faits qui peuvent se produire antérieurement, on dit qu'il y a *connexité*.

2. On peut établir la classification en se plaçant à un second point de vue; s'il y a n joueurs, le problème dont on s'occupe peut être

relatif à la détermination des gains de un, de deux, ... de $n-1$ joueurs. On dit alors que les probabilités sont à une, deux, ... $(n-1)$ variables.

3. Une troisième classification est également indispensable ; lorsque toutes les variables peuvent prendre toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$, les probabilités sont dites du *premier genre*. Lorsqu'une des variables est limitée dans un sens, les probabilités sont dites du *second genre*.

Lorsqu'une des variables est limitée dans les deux sens, les probabilités sont du *troisième genre*.

Les probabilités sont des *genres supérieurs* quand deux ou plusieurs variables sont limitées.

4. Avant de débuter par l'étude des probabilités du premier genre à une variable, il est nécessaire de faire une remarque relative à l'application pratique de nos formules : celles-ci supposent la continuité, leurs résultats ne seront donc qu'approchés quand on les appliquera à des jeux discontinus. L'approximation sera d'autant plus grande que le nombre μ des parties qui doivent être jouées sera plus grand.

Probabilité élémentaire.

5. *Le joueur A qui possède une fortune infinie doit jouer μ parties; quelle est la probabilité pour que sa perte soit x?*

Nous supposerons l'indépendance mais non l'uniformité, alors la probabilité pour que, entre les parties μ_α, μ_β, il se produise une perte y, ne dépend que des quantités μ_α, μ_β, y, elle peut donc être représentée par $\varpi_{\mu_\alpha,\mu_\beta,y}\,dy$. (Si nous supposions l'uniformité, la probabilité ne dépendrait que de $\mu_\alpha-\mu_\beta$, y. Nous ne ferons pas cette hypothèse).

Soit $\varpi_{0,\mu,x}\,dx$ la probabilité pour que la perte soit x à la $\mu^{\text{ième}}$ partie (c'est-à-dire pour que, à cette partie, elle se trouve comprise entre x et $x+dx$).

La probabilité pour que la perte soit x_1 à la $\mu_1^{\text{ième}}$ partie est $\varpi_{0,\mu_1,x_1}\,dx_1$.

La probabilité pour que la perte soit x à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, cette perte ayant été x_1 à la $\mu_1^{\text{ième}}$, est, en vertu du principe des probabilités composées,

$$\varpi_{0,\mu_1,x_1} \times \varpi_{\mu_1,\mu,x-x_1}\, dx_1\, dx.$$

La probabilité de la perte x à la $\mu^{\text{ième}}$ partie s'obtient, d'après le principe des probabilités totales, en intégrant l'expression précédente pour toutes les valeurs de x_1 de $-\infty$ à $+\infty$. Cette probabilité a aussi pour expression $\varpi_{0,\mu,x}\, dx$, on a donc

$$\varpi_{0,\mu,x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varpi_{0,\mu_1,x_1} \times \varpi_{\mu_1,\mu,x-x_1}\, dx_1.$$

Telle est l'équation de condition à laquelle doit satisfaire la probabilité élémentaire du premier genre $\varpi\, dx$.

La somme de toutes les probabilités doit être égale à un, on doit donc avoir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varpi_{0,\mu,x}\, dx = 1.$$

6. On vérifie facilement que la solution de ces équations est

$$\varpi_{\mu_1,\mu,y} = \frac{e^{-\frac{\left[\int_{\mu_1}^{\mu} \psi'(\mu)\, d\mu + y\right]^2}{\int_{\mu_1}^{\mu} \varphi'(\mu)\, d\mu}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\int_{\mu_1}^{\mu} \varphi'(\mu)\, d\mu}}\, dy.$$

L'identification des deux membres de l'équation conditionnelle repose uniquement sur l'égalité connue

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(az^2+bz+c)}\, dz = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}\, e^{\frac{b^2-4ac}{4a}}.$$

La probabilité a donc bien la valeur exprimée ci-dessus; $\psi'(\mu)$ et $\varphi'(\mu)$ sont des fonctions arbitraires (dont la seconde est positive); ce sont ces fonctions supposées données qui caractérisent le jeu dans l'intervalle $d\mu$ ou si l'on veut à la $\mu^{\text{ième}}$ partie.

7. Nous écrirons simplement comme suit l'expression de la probabilité élémentaire du premier genre, ou *probabilité pour que la perte soit x à la $\mu^{ième}$ partie*,

$$\varpi_{\mu,x} = \frac{e^{-\frac{[\psi(\mu)+x]^2}{\varphi(\mu)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi(\mu)}}\,dx,$$

et nous considérerons les fonctions ψ et φ comme arbitraires en tenant compte quand besoin sera de leur propriété additive; les fonctions $\psi(\mu)$ et $\varphi(\mu)$ ayant respectivement pour expression

$$\int_0^\mu \psi'(\mu)\,d\mu, \quad \int_0^\mu \varphi'(\mu)\,d\mu,$$

la valeur de ces fonctions pour μ parties est la somme des valeurs de ces fonctions pour chacune des μ parties considérée isolément. La seconde intégrale a tous ses éléments positifs, donc $\varphi(\mu)$ va sans cesse en croissant avec μ.

8. Il est facile de reconnaître ce que représentent les fonctions φ et ψ : le gain moyen ou espérance mathématique totale est

$$\mathcal{E} = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,e^{-\frac{[\psi(\mu)+x]^2}{\varphi(\mu)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi(\mu)}}\,dx = \psi(\mu).$$

La fonction $\psi(\mu)$ est donc l'espérance mathématique totale.

La valeur moyenne des carrés des gains et des pertes est

$$\mathrm{E}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2\,e^{-\frac{[\psi(\mu)+x]^2}{\varphi(\mu)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi(\mu)}}\,dx = \frac{\varphi(\mu)}{2} + [\psi(\mu)]^2,$$

on en déduit $\varphi(\mu) = 2(\mathrm{E}^2 - \mathcal{E}^2)$, donc :

La probabilité de la perte x à la $\mu^{ième}$ partie est

$$\frac{e^{\frac{(\mathcal{E}+x)^2}{2(\mathrm{E}^2-\mathcal{E}^2)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2(\mathrm{E}^2-\mathcal{E}^2)}}\,dx,$$

$\mathcal{E}$ étant la valeur moyenne des gains et E^2 la valeur moyenne des carrés des gains et des pertes.

9. Nous avons vu que la fonction $\psi(\mu)$ pour μ parties était égale à la somme des fonctions analogues relatives à chacune des parties considérée isolément. La fonction $\psi(\mu)$ est l'espérance totale $\mathcal{E}$; donc l'espérance totale pour μ parties est la somme des espérances des μ parties; résultat évident.

La fonction $\varphi(\mu) = 2(E^2 - \mathcal{E}^2)$, que nous appellerons la *fonction d'instabilité*, jouit des mêmes propriétés additives, de sorte que *la probabilité de la perte x à la $\mu^{ième}$ partie a pour expression*

$$\frac{e^{-\frac{(\Sigma\mathcal{E}_i + x)^2}{2\Sigma(E_i^2 - \mathcal{E}_i^2)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\Sigma(E_i^2 - \mathcal{E}_i^2)}}\,dx.$$

$\mathcal{E}_i$ est l'espérance mathématique ou gain moyen de la $i^{ème}$ partie considérée isolément. E_i^2 est la valeur moyenne des carrés des gains et des pertes de la $i^{ème}$ partie considérée isolément.

On doit remarquer que la probabilité est indépendante de l'ordre des parties jouées.

Les formules se simplifient lorsqu'il y a uniformité; nous n'étudierons pas spécialement ce cas particulier.

10. Si, par exemple, à chaque partie, deux alternatives sont seules possibles; si à la $i^{ème}$ partie le joueur a probabilité p_i de gagner la somme α_i et probabilité q_i de perdre la somme β_i, on a

$$\mathcal{E}_i = \alpha_i p_i - \beta_i q_i, \qquad E_i^2 = \alpha_i^2 p_i + \beta_i^2 q_i,$$
$$E_i^2 - \mathcal{E}_i^2 = p_i q_i (\alpha_i + \beta_i)^2.$$

On peut supposer aussi qu'une infinité d'alternatives soit possible à chaque partie; que, par exemple, à la $i^{ème}$ partie il y ait probabilité $\zeta(y)\,dy$ pour que le joueur perde une somme y; y pouvant, par exemple, varier de $-\varepsilon_1$ à $+\varepsilon_2$. On aura alors

$$\int_{-\varepsilon_1}^{+\varepsilon_2} \zeta(y)\,dy = 1, \qquad \mathcal{E}_i = \int_{-\varepsilon_1}^{+\varepsilon_2} y\zeta(y)\,dy, \qquad E_i^2 = \int_{-\varepsilon_1}^{+\varepsilon_2} y^2\zeta(y)\,dy.$$

11. La formule du n° 9 était connue de Laplace, la différence entre cette formule et celle du n° 7 consiste dans la conception.

Laplace considérait sa formule comme approchée, nous considérons la nôtre comme exacte.

La formule de Laplace constituait le but de sa théorie; elle est, au contraire, le point de départ de la nôtre.

Cas où il y a symétrie.

12. Le jeu peut être équitable dans son ensemble, il suffit pour cela que $\psi(\mu) = \Sigma\varepsilon_i$ soit nul. Si à chaque partie le jeu est équitable, il est nécessairement équitable dans son ensemble. La probabilité de la perte x a alors pour valeur

$$\varpi_{\mu,x} = \frac{e^{-\frac{x^2}{\varphi(\mu)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi(\mu)}}\,dx.$$

Si l'on change x en $-x$, cette formule ne change pas. Donc, lorsqu'on suppose la continuité, le fait pour un jeu d'être équitable a pour conséquence la symétrie de la probabilité.

La probabilité $\mathfrak{P}_{\mu,x}$ pour que la perte soit supérieure à x, ou *probabilité totale du premier genre*, s'obtient en intégrant l'expression précédente entre x et ∞ et en posant $x^2 = \lambda^2\varphi(\mu)$, on a

$$\mathfrak{P}_{\mu,x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{\sqrt{\varphi(\mu)}}} e^{-\lambda^2}\,d\lambda.$$

Cette probabilité se calcule donc facilement par les Tables de Kramp.

13. Considérons l'intervalle $\pm x$ tel que la probabilité pour que l'écart soit inférieur à x soit égale à une quantité donnée u, on doit avoir

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{\sqrt{\varphi(\mu)}}} e^{-\lambda^2}\,d\lambda = u.$$

Cet intervalle x, si la probabilité est constante, varie proportionnellement à la racine carrée de la fonction d'instabilité, donc :

Les écarts croissent proportionnellement à la racine carrée de la fonction d'instabilité.

C'est à cette propriété que la fonction d'instabilité doit son nom.

La fonction $\varphi(\mu)$ croissant constamment, les écarts vont sans cesse en croissant; ils croissent indéfiniment si $\varphi(\mu)$ tend vers l'infini, autrement ils tendent vers la loi asymptote à laquelle correspond $\varphi(\infty)$.

Cas général.

14. La *probabilité du premier genre* $\mathfrak{P}_{\mu,x}$, ou probabilité pour que la perte soit supérieure à x à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, s'obtient en intégrant la formule du n° **7** entre x et $+\infty$, et en posant $\psi(\mu)+x=\lambda\sqrt{\varphi(\mu)}$, on a

$$\mathfrak{P}_{\mu,x}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{\psi(\mu)+x}{\sqrt{\varphi(\mu)}}} e^{-\lambda^2}\,d\lambda.$$

Cette probabilité se calcule donc facilement par les Tables de Kramp.

Reprenons la formule du n° **7** et posons $x=x'-\psi(\mu)$, la probabilité relative à x' est

$$\frac{e^{-\frac{x'^2}{\varphi(\mu)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi(\mu)}}\,dx'.$$

La distribution des probabilités de part et d'autre de la probabilité maxima $[x=-\psi(\mu)]$ est donc analogue à celle que nous avons étudiée (n° **12**), nous pouvons donc dire :

Le gain moyen est égal à l'espérance mathématique totale, les écarts en plus ou en moins sont proportionnels à la racine carrée de la fonction d'instabilité.

Application à la théorie des épreuves répétées.

15. *La probabilité d'un événement est p_1 à la première épreuve, p_2 à la deuxième, p_3 à la troisième, etc. Quelle est la probabilité pour que l'événement se produise z fois en μ épreuves?*

Supposons qu'un joueur A touche un franc chaque fois que l'événement se produit et qu'il ne touche rien quand l'événement ne se produit pas. La probabilité pour que l'événement se produise z fois est égale à la probabilité pour que le joueur gagne z francs, probabilité qui est exprimée par la formule du n° **9**. Dans le cas considéré

$$\varepsilon_i = p_i, \qquad \Sigma\varepsilon_i = \Sigma p, \qquad \mathrm{E}_i^2 = p_i,$$
$$2\Sigma(\mathrm{E}_i^2 - \varepsilon_i^2) = 2\Sigma(p^2 - p) = 2\Sigma pq$$

en posant $q = 1 - p$. La probabilité pour que l'événement se produise z fois en μ épreuves est donc

$$\frac{e^{-\frac{(\Sigma p - z)^2}{2\Sigma pq}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\Sigma pq}}\,dz.$$

16. La valeur moyenne, la valeur probable et la valeur la plus probable du nombre des arrivées de l'événement est Σp. Nous représenterons les autres nombres des arrivées de l'événement par leurs différences à Σp; nous poserons $z = \Sigma p + x$. La quantité x est dite l'*écart*.

La formule ci-dessus donne la probabilité pour que z soit compris entre z et $z + dz$, la probabilité pour que l'écart x soit compris entre x et $x + dx$ est donc

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{2\Sigma pq}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\Sigma pq}}\,dx.$$

Cette formule attribuée à Poisson n'est donc qu'un cas particulier de celle de Laplace.

Lorsqu'il y a uniformité, c'est-à-dire lorsque les épreuves sont iden-

tiques, elle se réduit à

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{2\mu pq}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\mu pq}}\,dx.$$

Je n'ai pas à exposer les conséquences de cette formule, elles sont développées dans le cours de calcul des probabilités de M. H. Poincaré.

Lorsqu'il n'y a pas uniformité, les conclusions à tirer de la formule sont les mêmes, sauf lorsque Σpq tend vers une limite fixe; alors les écarts au lieu d'augmenter indéfiniment avec le nombre des épreuves tendent vers une limite fixe.

PROBABILITES CONNEXES.

17. Jusqu'à présent, nous avons supposé l'indépendance, nous avons admis que les conditions pour une partie étaient indépendantes des résultats antérieurs du jeu.

Lorsqu'on essaie de s'affranchir de cette hypothèse on rencontre des difficultés excessives, de sorte que certaines classes de probabilités connexes semblent seules pouvoir être l'objet d'une théorie.

Nous étudierons ici les probabilités connexes du premier genre. Nous dirons qu'il y a connexité du premier genre quand les conditions à une partie dépendent uniquement de la perte actuelle et du rang occupé par la partie. Nous supposerons d'abord l'uniformité, de sorte que les conditions à une partie ne dépendent que de la perte réalisée quand on commencera cette partie.

18. Si les conditions d'un jeu sont telles que, à chaque partie, l'espérance totale relative à cette partie soit proportionnelle à la perte actuelle et que la fonction d'instabilité soit constante, la probabilité pour que la perte soit x à la $\mu^{\text{ième}}$ partie est

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{\varphi_1\frac{1-e^{-2a\mu}}{2a}}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi_1\frac{1-e^{-2a\mu}}{2a}}}\,dx,$$

φ_1 est la fonction d'instabilité relative à une partie, c'est une constante, nous l'avons supposé. a est le coefficient correspondant à l'espérance totale; quand la perte actuelle est x, l'espérance totale pour la partie suivante est ax.

Pour démontrer cette formule, on suppose d'abord que l'intervalle μ est divisé en deux intervalles μ_1, μ_2. Dans chacun d'eux il y a indépendance; dans le premier, l'espérance est nulle, mais dans le second l'espérance est proportionnelle à la perte réalisée dans le premier.

On suppose ensuite que l'intervalle μ est divisé en trois intervalles dans lesquels il y a indépendance. Dans le premier l'espérance est nulle, dans le deuxième, l'espérance est proportionnelle à la perte réalisée à la fin du premier et, dans le troisième, l'espérance est proportionnelle à la perte réalisée à la fin du deuxième.

On suppose ensuite l'intervalle μ divisé en une infinité d'autres, et l'on arrive ainsi à la formule précédente.

19. Le problème considéré paraît particulier, il a cependant une grande importance parce qu'il étudie le cas le plus simple, celui où il existe une cause accélératrice ou retardatrice des écarts, proportionnelle à la valeur même de ces écarts.

Si a est négatif, une perte x rend plus probable une perte plus grande; les conditions du jeu rendent plus rapide la production des écarts, elles sont accélératrices.

Si a est nul, il y a indépendance.

Si a est positif, à une perte x correspond une espérance ax positive qui tend à diminuer cette perte, les conditions du jeu ont donc une influence régulatrice.

Considérons maintenant le cas général des probabilités connexes du premier genre, supposons qu'il y ait symétrie dans l'ensemble (c'est-à-dire que la perte x en μ parties ait même probabilité que le gain x) et supposons qu'il existe une cause tendant à régulariser les écarts. Cette cause se traduit par une espérance mathématique qui, par définition, ne dépend que de l'écart x et qui peut se représenter par le développement : $a_0 + ax + a_2x^2 + \ldots$. Puisqu'il y a symétrie dans l'ensemble, a_0 est nul, et, si l'écart est infiniment petit, l'espérance mathématique se réduit à ax.

Le problème considéré est donc très important, parce qu'il régit tous les cas où les écarts restent très petits.

20. La probabilité pour que la perte soit supérieure à x à la $\mu^{\text{ième}}$ partie s'obtient en intégrant la formule ci-dessus entre x et $+\infty$. En posant $x = \lambda\sqrt{\varphi_1 \frac{1-e^{-2a\mu}}{2a}}$, cette probabilité a pour expression

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x\sqrt{2a}}{\sqrt{\varphi_1(1-e^{-2a\mu})}}} e^{-\lambda^2}\, d\lambda,$$

elle est donc facilement calculable par les Tables de Kramp.

L'amplitude des écarts est mesurée par la quantité

$$\sqrt{\varphi_1 \frac{1-e^{-2a\mu}}{2a}}$$

dont le carré pourrait être nommé *fonction d'instabilité totale*. Cette fonction ne jouit pas de la propriété d'addition comme lorsqu'il y a indépendance.

21. Nous allons supposer que μ augmente indéfiniment et nous distinguerons trois cas :

1° Les conditions du jeu sont retardatrices ($a > 0$); la distribution des probabilités tend vers la loi asymptote

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{\frac{\varphi_1}{2a}}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{\varphi_1}{2a}}}\, dx.$$

Les écarts croissent constamment, mais ils tendent vers des limites fixes; ils décroissent indéfiniment en valeur relative (relativement à μ).

2° Les conditions sont accélératrices ($a < 0$) : Les écarts croissent en valeur absolue et relative, et plus rapidement que toute quantité algébrique.

3° Dans le cas intermédiaire où $a = 0$, nous retrouvons la loi de Bernoulli et la formule de Laplace : Les écarts croissent indéfiniment en valeur absolue, ils décroissent indéfiniment en valeur relative.

22. Supposons que le joueur A ait perdu actuellement la somme z; la probabilité pour que, en jouant μ_2 nouvelles parties, sa perte totale soit x (ou, si l'on veut, pour que dans ces μ_2 parties il perde la somme $x - z$) est

$$\frac{e^{-\frac{(x-ze^{-a\mu_2})^2}{\frac{\varphi_1}{2a}(1-e^{-2a\mu_2})}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{\varphi_1}{2a}(1-e^{-2a\mu_2})}}\,dx.$$

Si, en effet, on désigne par $\varpi_{\mu_2,z,x}$ cette probabilité, celle-ci doit vérifier l'équation suivante analogue à celle du n° 5

$$\varpi_{\mu_1+\mu_2,o,x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varpi_{\mu_1,o,z}\,\varpi_{\mu_2,z,x}\,dz.$$

En donnant aux quantités ϖ la valeur ci-dessus, l'identification des deux membres ne présente pas de difficulté.

23. *L'urne* A *contient* m *boules blanches et* n *boules noires, l'urne* B *contient* m' *boules blanches et* n' *boules noires; chaque épreuve consiste à tirer une boule de* A *pour la placer dans* B, *en même temps qu'à tirer une boule de* B *pour la placer dans* A. *Quelle est la probabilité pour que, après* μ *épreuves, les urnes* A *et* B *aient une composition donnée?*

Nous dirons que l'écart est x si les nombres des boules blanches et des boules noires contenues dans l'urne A sont respectivement

$$\frac{(m+m')(m+n)}{s} + x, \quad \frac{(n+n')(m+n)}{s} - x,$$

s désignant la somme $m + m' + n + n'$ des boules.

Si l'écart est x, il y a au prochain tirage probabilité

$$\frac{(m+m')(m+n)(n+n')(m'+n') + sx[(m+m')(m+n) + (n+n')(m'+n)] + s^2x^2}{(m+n)(m'+n')s^2}$$

pour qu'il sorte une boule blanche de l'urne A et une noire de l'urne B et, par suite, pour que l'écart diminue d'une unité.

Il y a de même probabilité

$$\frac{(n+n')(m+n)(m+m')(m'+n')-sx[(n+n')(m+n)+(m+m')(m'+n')]-s^2x^2}{(m+n)(m'+n')s^2}$$

pour qu'il sorte une noire de l'urne A et une blanche de l'urne B et, par suite, pour que l'écart augmente d'une unité.

Supposons qu'un joueur H perde une somme égale à l'écart. Pour le tirage considéré son espérance mathématique est égale à la différence des probabilités précédentes; elle a donc pour valeur

$$\frac{sx}{(m+n)(m'+n')},$$

elle est proportionnelle à x.

Nous supposerons que m, m', n, n', μ sont des grands nombres du même ordre. Si les écarts partaient de zéro et si aucune cause retardatrice n'agissait sur eux, ces écarts seraient de l'ordre $\sqrt{\mu}$ (théorie ordinaire des épreuves répétées) négligeables comparativement à μ et, par suite, comparativement à m, m', n, n'. Dans le cas actuel, il en est de même à plus forte raison si l'écart initial

$$z = \frac{mn' - m'n}{s}$$

est (comme nous le supposerons) négligeable comparativement à μ, m, m', n, n'.

Si l'on néglige x auprès de m, m', n, n' dans l'expression de la fonction d'instabilité relative au prochain tirage, celle-ci se réduit à

$$\frac{4(m+m')(n+n')}{s^2}.$$

L'espérance étant proportionnelle à x et la fonction d'instabilité étant constante, la probabilité pour que, en μ épreuves, l'écart ait une valeur donnée x s'obtient en remplaçant dans la formule du n° **22** les

quantités α, φ_1 et φ par leur valeur; la probabilité de l'écart x est donc

$$\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\pi}}\,\frac{e^{-\frac{s\left[sx - (mn'-m'n)\,e^{-\frac{s\mu}{(m+n)(m'+n')}}\right]^2}{2(m+m')(n+n')(m+n)(m'+n')\left[1-e^{-\frac{2s\mu}{(m+n)(m'+n')}}\right]}}}{\sqrt{2(m+m')(n+n')(m+n)(m'+n')\left[1-e^{-\frac{2s\mu}{(m+n)(m'+n')}}\right]}}\,dx.$$

Il faut remarquer que la formule du n° **22** est exacte, tandis que celle-ci n'est qu'approchée.

Laplace a essayé de résoudre le problème dont nous venons de nous occuper (*Théorie des Probabilités*, p. 292), il suppose que l'on ait $m' + n' = m + n$ et $m + m' = n + n'$, il établit d'abord une équation aux différences finies partielles qui est exacte, puis il transforme celle-ci par des approximations mal conduites, il arrive ainsi à une équation aux dérivées partielles qui est inexacte.

Sa méthode, convenablement employée, eût permis sinon de résoudre le problème, du moins d'obtenir l'équation aux dérivées partielles qui le régit : Si l'on désigne par U la probabilité d'un écart x en μ épreuves, la fonction U doit vérifier l'équation

$$\frac{e^{-\frac{s\mu}{m-n}}}{4}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{m-n}{m+n}e^{-\frac{2\mu}{m+n}}\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \mu},$$

et plus généralement, quand les urnes sont quelconques,

$$\frac{(m+m')(n+n')}{s^2}e^{-\frac{2s\mu}{(m+n)(m'+n')}}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{mn'-m'n}{(m+n)(m'+n')}e^{-\frac{s\mu}{(m+n)(m'+n')}}\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \mu},$$

l'expression donnée précédemment pour la probabilité satisfait bien à cette équation.

Probabilités non uniformes.

24. Il est possible d'obtenir l'expression des probabilités, quand, à chaque partie, la fonction d'instabilité dépend uniquement de μ, quand elle est, par conséquent, de la forme $\lambda(\mu)$ et quand, d'autre

part, l'espérance mathématique pour une partie est égale au produit de la perte totale x réalisée avant cette partie par une fonction de μ, $f(\mu)$.

Le cas précédemment traité supposait $\lambda(\mu)$ et $f(\mu)$ constants.

En suivant un raisonnement analogue à celui du n° **18**, on est conduit à ce résultat.

La probabilité de la perte x à la $\mu^{\text{ième}}$ partie a pour expression

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{F(\mu)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{F(\mu)}}\,dx,$$

$F(\mu)$ étant l'intégrale de l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial \mu} + 2f(\mu)F = \lambda(\mu).$$

23. Une urne contient m boules blanches et n boules noires; on en extrait μ boules au hasard sans les remettre dans l'urne; on dit que l'écart est x si en μ tirages il est sorti $\frac{\mu m}{m+n} + x$ boules blanches. Quelle est la probabilité de l'écart x?

Supposons qu'un joueur A perde une somme égale à l'écart, supposons encore que μ tirages aient été effectués et que l'écart soit x.

Au tirage suivant il y a probabilité

$$\frac{(m-x)(m+n) - m\mu}{(m+n)(m+n-\mu)}$$

pour qu'il sorte une blanche et, par suite, pour que l'écart augmente de la quantité $\frac{n}{m+n}$, il y a de même probabilité

$$\frac{(m+n)(n+x) - n\mu}{(m+n)(m+n-\mu)}$$

pour qu'il sorte une noire et qu'alors l'écart diminue de la quantité $\frac{m}{m+n}$.

L'espérance mathématique du joueur A pour le tirage considéré est donc

$$\frac{x}{m+n-\mu},$$

elle est proportionnelle à x et elle est de la forme $x f(\mu)$.

La fonction d'instabilité a pour valeur

$$\frac{2[(m+n)(m-x)-m\mu][(m+n)(n+x)-n\mu]}{(m+n)^2(m+n-\mu)^2}.$$

Nous supposerons que m, n, μ sont de grands nombres du même ordre. Si aucune cause retardatrice n'existait, c'est-à-dire si à chaque épreuve la probabilité de sortie d'une boule blanche était constante, l'écart x serait de l'ordre de $\sqrt{\mu}$ (théorie ordinaire des épreuves répétées) et, par suite, il serait négligeable par rapport à μ. Puisque, dans le cas actuel, les écarts tendent d'eux-mêmes à diminuer, x est à plus forte raison négligeable comparativement à μ, à m ou à n. L'expression de la fonction d'instabilité se réduit à

$$\frac{2mn}{(m+n)^2}.$$

L'espérance mathématique étant de la forme $x f(\mu)$ et la fonction d'instabilité de la forme $\lambda(\mu)$, on peut appliquer au problème qui nous occupe la formule du n° **24**.

La probabilité de l'écart x en μ épreuves est donc

$$\frac{(m+n)\sqrt{m+n}\, e^{-\frac{x^2}{2\mu}\frac{(m+n)^2}{mn}\frac{m+n}{m+n-\mu}}}{\sqrt{2\pi\mu mn(m+n-\mu)}}\, dx.$$

Cette formule est connue, mais il faut remarquer qu'elle constitue une simple application de notre théorie; elle sera, d'ailleurs, généralisée comme la théorie elle-même dans la suite de cette étude.

PROBABILITÉS DU SECOND GENRE.

26. D'après notre classification des probabilités, celles-ci sont dites *du second genre* quand la variable qui exprime la somme gagnée ou perdue par un joueur est limitée dans un sens.

Nous allons donc traiter le cas où un joueur A qui possède seulement la somme m, que nous appellerons *sa fortune*, joue contre des adversaires de fortune infinie. Chacun des joueurs devant régler les différences après chaque partie, il pourra arriver un moment où le joueur A aura perdu la somme m qu'il possède, nous dirons alors qu'il est ruiné.

Les probabilités de ruine du joueur A dépendent des conditions du jeu qui lui sont propres et non du nombre de ses adversaires. Si le joueur A a un seul adversaire B, le sort de B se déduit immédiatement de celui de A.

Nous aurons à résoudre les questions suivantes :

1° Quelle est la probabilité $\Pi_{\mu,m}$ pour que le joueur A soit ruiné exactement à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, ou, en d'autres termes, quelle est la probabilité pour que la perte m soit atteinte pour la première fois à la $\mu^{\text{ième}}$ partie.

La probabilité $\Pi_{\mu,m}$ est la probabilité élémentaire du second genre.

2° Quelle est la probabilité $P_{\mu,m}$ pour que la ruine se produise en μ parties ? $P_{\mu,m}$ est la probabilité du second genre.

Il est évident que la connaissance d'une des probabilités P et Π entraîne la connaissance de l'autre, car on a

$$P_{\mu,m} = \int_0^{\mu} \Pi_{\mu,m}\, d\mu \qquad \text{et} \qquad \Pi_{\mu,m} = \frac{\partial P_{\mu,m}}{\partial \mu}.$$

3° En supposant qu'aucune limite ne soit assignée pour la durée du jeu, quelle est la durée moyenne de celui-ci et la probabilité totale $P_{\infty,m}$ de ruine du joueur ?

4° Quelle est la probabilité pour que, à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, le joueur A perde une somme donnée ?

5° Quelle est l'espérance mathématique du joueur A ?

Cas où il y a symétrie.

27. Nous étudierons d'abord le cas où le jeu est équitable et *non uniforme*.

Nous avons vu (nº **12**) que, si l'on suppose la continuité, le fait pour un jeu d'être équitable a pour conséquence la symétrie des probabilités. Il en résulte que certains problèmes relatifs aux jeux équitables peuvent se résoudre par simple raison de symétrie.

En désignant, comme précédemment (nº **12**), par $\mathfrak{P}_{\mu,m}$ la probabilité pour que le joueur perde une somme supérieure à m à la $\mu^{\text{ième}}$ partie et par $P_{\mu,m}$ la probabilité pour qu'il soit ruiné avant μ parties, on a

$$P_{\mu,m} = 2\mathfrak{P}_{\mu,m}.$$

En effet, la perte m ne peut être dépassée au bout de μ parties sans l'avoir été antérieurement, la probabilité $\mathfrak{P}$ est donc égale à la probabilité P multipliée par la probabilité pour que la perte m ayant été atteinte avant μ parties soit dépassée à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, c'est-à-dire multipliée par $\frac{1}{2}$, on a donc

$$\mathfrak{P}_{\mu,m} = \tfrac{1}{2} P_{\mu,m}.$$

On en déduit

$$P_{\mu,m} = 2\mathfrak{P}_{\mu,m} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{m}{\sqrt{\varphi(\mu)}}} e^{-\lambda^2}\, d\lambda.$$

La probabilité $P_{\mu,m}$ se calcule donc facilement par les Tables de Kramp. On doit remarquer qu'elle est indépendante de l'ordre des parties. (Si le jeu est uniforme et si μ tend vers l'infini, $P_{\mu,m}$ tend vers un, la probabilité de la ruine est alors une certitude.)

28. La probabilité élémentaire $\Pi_{\mu,m}$ pour que la ruine ait lieu exactement à la $\mu^{\text{ième}}$ partie a pour valeur

$$\Pi_{\mu,m} = \frac{\partial P_{\mu,m}}{\partial \mu} = \frac{m\varphi'(\mu)\, e^{-\frac{m^2}{\varphi(\mu)}}}{\sqrt{\pi}\, \varphi(\mu)\sqrt{\varphi(\mu)}}\, d\mu,$$

cette probabilité est proportionnelle à la fonction d'instabilité $\varphi(\mu)$ de la dernière partie et indépendante de l'ordre des parties antérieures.

Quelques intégrales.

29. La perte m ne peut être atteinte sans que la perte m_1 le soit d'abord si m est plus grand que m_1. La probabilité pour que la perte m soit atteinte pour la première fois à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, la perte m_1 ayant été pour la première fois atteinte à la $\mu_1^{\text{ième}}$ partie, est, en vertu du principe des probabilités composées,

$$\Pi_{0,\mu_1,m_1} \times \Pi_{\mu_1,\mu,m-m_1}.$$

La perte m_1 pouvant être atteinte pour la première fois à toutes les parties depuis zéro jusqu'à μ, on a, en vertu du principe des probabilités totales,

$$\Pi_{0,\mu,m} = \int_{\mu_1=0}^{\mu_1=\mu} \Pi_{0,\mu_1,m_1} \times \Pi_{\mu_1,\mu,m-m_1}\, d\mu_1,$$

ou, en remplaçant les quantités Π par leur valeur,

$$\frac{m\varphi'(\mu)\,e^{-\frac{m^2}{\varphi(\mu)}}}{\sqrt{\pi\varphi(\mu)}\sqrt{\varphi(\mu)}} = \int_0^{\mu} \frac{m_1\varphi'(\mu_1)\,e^{-\frac{m_1^2}{\varphi(\mu_1)}}}{\sqrt{\pi\varphi(\mu_1)}\sqrt{\varphi(\mu_1)}}\, \frac{(m-m_1)\varphi'(\mu)\,e^{-\frac{(m-m_1)^2}{\varphi(\mu)-\varphi(\mu_1)}}}{\sqrt{\pi[\varphi(\mu)-\varphi(\mu_1)]}\sqrt{\varphi(\mu)-\varphi(\mu_1)}}\, d\mu_1;$$

cette formule peut être obtenue, quoique péniblement, par les procédés ordinaires de l'Analyse.

Mais le calcul des probabilités permet sa généralisation immédiate : on peut supposer la perte m divisée en un nombre arbitraire d'intervalles égaux ou non : $m_n, m_{n-1}, \ldots, m_1$, de sorte que

$$m = m_n + m_{n-1} + \ldots + m_1,$$

le premier étant atteint à la $(\mu_{n-1})^{\text{ième}}$ partie, le second à la $(\mu_{n-2})^{\text{ième}}$ partie, le troisième à la $(\mu_{n-3})^{\text{ième}}$ partie, ..., on aura alors

$$\Pi_{\mu,m_1+m_2+\ldots+m_n} = \int_{\mu_1=0}^{\mu_1=\mu}\int_{\mu_2=0}^{\mu_2=\mu_1}\cdots\int_{\mu_{n-2}=0}^{\mu_{n-2}=\mu_{n-3}}\int_{\mu_{n-1}=0}^{\mu_{n-1}=\mu_{n-2}} \Pi_{0,\mu_{n-1},m_n}$$
$$\times\, \Pi_{\mu_{n-1},\mu_{n-2},m_{n-1}} \times \ldots \times \Pi_{\mu_2,\mu_1,m_2} \times \Pi_{\mu_1,\mu,m_1}\, d\mu_{n-1}\, d\mu_{n-2} \ldots d\mu_1$$

ou, en remplaçant les quantités Π par leur valeur,

$$\frac{(m_1+m_2+\ldots+m_n)\varphi'(\mu)\,e^{-\frac{(m_1+m_2+\ldots+m_n)^2}{\varphi(\mu)}}}{\sqrt{\pi}\,\varphi(\mu)\sqrt{\varphi(\mu)}}$$

$$= \int_{\mu_1=0}^{\mu_1=\mu}\int_{\mu_2=0}^{\mu_2=\mu_1}\cdots\int_{\mu_{n-2}=0}^{\mu_{n-2}=\mu_{n-3}}\int_{\mu_{n-1}=0}^{\mu_{n-1}=\mu_{n-2}} \frac{m_1 m_2\ldots m_n\,\varphi'(\mu)\,\varphi'(\mu_1)\,\varphi'(\mu_2)\ldots\varphi'(\mu_{n-1})}{(\sqrt{\pi})^n}$$

$$\times \frac{e^{-\frac{m_n^2}{\varphi(\mu_{n-1})}-\frac{m_{n-1}^2}{\varphi(\mu_{n-2})-\varphi(\mu_{n-1})}-\frac{m_{n-2}^2}{\varphi(\mu_{n-3})-\varphi(\mu_{n-2})}-\ldots-\frac{m_1^2}{\varphi(\mu)-\varphi(\mu_1)}}}{\{\varphi(\mu_{n-1})[\varphi(\mu_{n-2})-\varphi(\mu_{n-1})][\varphi(\mu_{n-3})-\varphi(\mu_{n-2})]\ldots[\varphi(\mu)-\varphi(\mu_1)]\}^{\frac{3}{2}}}\,d\mu_n\,d\mu_{n-2}\ldots d\mu_1.$$

La valeur de cette intégrale dont l'ordre de multiplicité est arbitraire est obtenue sans aucun calcul.

Je rappelle que la fonction φ (dont φ' est la dérivée) est arbitraire sous la seule condition d'être positive et croissante.

30. La perte m ne peut être atteinte sans que la perte m_1 le soit d'abord si m est plus grand que m_1. La probabilité pour que la perte soit m à la μ^{ieme} partie, la perte m_1 ayant été, pour la première fois, atteinte à la ${\mu_1}^{\text{ieme}}$ partie est, en vertu du principe des probabilités composées,

$$\Pi_{0,\mu_1,m_1}\times\varpi_{\mu_1,\mu,m-m_1}.$$

La perte m_1 pouvant être atteinte pour la première fois à toutes les parties depuis zéro jusqu'à μ, on a, en vertu du principe des probabilités totales,

$$\varpi_{0,\mu,m}=\int_0^{\mu}\Pi_{0,\mu_1,m_1}\times\varpi_{\mu_1,\mu,m-m_1}\,d\mu_1$$

ou, en remplaçant les quantités ϖ et Π par leur valeur,

$$\frac{e^{-\frac{m^2}{\varphi(\mu)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi(\mu)}}=\int_0^{\mu}\frac{m_1\varphi'(\mu_1)\,e^{-\frac{m_1^2}{\varphi(\mu_1)}}}{\sqrt{\pi}\,\varphi(\mu_1)\sqrt{\varphi(\mu_1)}}\,\frac{e^{-\frac{(m-m_1)^2}{\varphi(\mu)-\varphi(\mu_1)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi(\mu)-\varphi(\mu_1)}}\,d\mu_1.$$

Sans qu'aucun nouveau calcul soit nécessaire, on peut généraliser cette formule comme nous l'avons fait précédemment; on obtient ainsi une intégrale multiple analogue à celle du n° **29**.

Si, dans la dernière intégrale simple, on pose

$$y^2 = \frac{a(m - m_1)}{m_1} \frac{\varphi(\mu_1)}{\varphi(\mu) - \varphi(\mu_1)},$$

on obtient l'intégrale connue

$$\int_0^\infty e^{-y^2 - \frac{a^2}{y^2}} \frac{dy}{y^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-2a};$$

en posant dans cette intégrale $xy = a$, elle devient

$$\int_0^\infty e^{-x^2 - \frac{a^2}{x^2}} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2a}.$$

Cas général.

51. Nous ne supposerons pas que le jeu soit équitable ni uniforme. Sans traiter le cas le plus général où il y aurait indépendance absolue, c'est-à-dire où l'espérance et la fonction d'instabilité seraient individuellement quelconques et variables à chaque partie, nous supposerons que la fonction d'instabilité soit variable et quelconque et que l'espérance lui soit constamment proportionnelle.

En désignant comme précédemment par $\varphi(\mu)$ la fonction d'instabilité et par $\psi(\mu)$ l'espérance totale, nous aurons donc $\psi(\mu) = k\varphi(\mu)$, k étant un coefficient.

La fonction $\varphi(\mu)$ étant constamment positive et croissante, l'espérance $k\varphi(\mu)$ sera constamment croissante ou décroissante suivant le signe de k.

Si k est nul, le jeu est équitable et non uniforme, le problème considéré est donc plus général que celui que nous venons de traiter.

Lorsque la fonction $\varphi(\mu)$ est linéaire, le jeu considéré est uniforme et si ψ_1 et φ_1 désignent l'espérance et la fonction d'instabilité relatives à une partie, on a

$$\varphi(\mu) = \mu\varphi_1, \qquad \psi(\mu) = \mu\psi_1 \qquad \text{et} \qquad k = \frac{\psi_1}{\varphi_1}.$$

Le cas le plus important de beaucoup, celui du jeu uniforme quelconque, n'est donc qu'un cas particulier de celui que nous étudions.

52. La perte m ne peut être atteinte sans que la perte m_1 le soit d'abord si m_1 est inférieur à m.

La probabilité pour que la perte soit m à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, la perte m_1 ayant été pour la première fois atteinte à la $\mu_1{}^{\text{ième}}$ partie, est, en vertu du principe des probabilités composées,

$$\Pi_{0,\mu_1,m_1} \times \varpi_{\mu_1,\mu,m-m_1}.$$

La perte m_1 pouvant être atteinte à toutes les parties depuis zéro jusqu'à μ, la probabilité pour que la perte soit m à la $\mu^{\text{ième}}$ partie est, en vertu du principe des probabilités totales,

$$\varpi_{0,\mu,m} = \int_0^\mu \Pi_{0,\mu_1,m_1} \times \varpi_{\mu_1,\mu,m-m_1}\, d\mu_1.$$

Telle est l'équation de condition à laquelle doit satisfaire la fonction Π.

53. Les probabilités ϖ sont connues (n° **7**), on a, par exemple, puisque $\psi(\mu) = k\varphi(\mu)$,

$$\varpi_{\mu_1,\mu,m-m_1} = \frac{e^{-\frac{[k(\varphi(\mu)-\varphi(\mu_1))+m-m_1]^2}{\varphi(\mu)-\varphi(\mu_1)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi(\mu)-\varphi(\mu_1)}}.$$

Il est facile de voir que l'équation conditionnelle est vérifiée si l'on a

$$\Pi_{0,\mu,m} = \frac{m\varphi'(\mu)\, e^{-\frac{[k\varphi(\mu)+m]^2}{\varphi(\mu)}}}{\sqrt{\pi}\,\varphi(\mu)\sqrt{\varphi(\mu)}};$$

le second membre de l'équation conditionnelle peut en effet s'écrire :

$$e^{-(k^2\varphi(\mu)+2mk)} \int_0^\mu \frac{m_1\varphi'(\mu_1)\, e^{-\frac{m_1^2}{\varphi(\mu_1)}}}{\sqrt{\pi}\,\varphi(\mu_1)\sqrt{\varphi(\mu_1)}} \, \frac{e^{-\frac{(m-m_1)^2}{\varphi(\mu)-\varphi(\mu_1)}}}{\sqrt{\varphi(\mu)-\varphi(\mu_1)}}\, d\mu_1,$$

l'intégrale est celle que nous avons déterminée (n° **50**), et, en substi-

tuant sa valeur dans l'équation conditionnelle, celle-ci devient identique.

La probabilité de ruine à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, c'est-à-dire la *probabilité élémentaire du second genre*, a donc pour expression

$$\Pi_{\mu,m} = \frac{m\varphi'(\mu)\, e^{-\frac{[k\varphi(\mu)+m]^2}{\varphi(\mu)}}}{\sqrt{\pi}\,\varphi(\mu)\sqrt{\varphi(\mu)}},$$

elle est indépendante de l'ordre des parties qui précèdent la $\mu^{\text{ième}}$ et proportionnelle à la fonction d'instabilité $\varphi'(\mu)$ de la $\mu^{\text{ième}}$ partie.

Probabilité totale.

54. La probabilité pour que la ruine ait lieu en μ parties s'obtient en intégrant l'expression précédente entre zéro et μ.

Par des changements de variables on obtient, quel que soit le signe de k,

$$P_{\mu,m} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{m+k\varphi(\mu)}{\sqrt{\varphi(\mu)}}}^{\infty} e^{-\lambda^2}\, d\lambda + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-4mk} \int_{\frac{m-k\varphi(\mu)}{\sqrt{\varphi(\mu)}}}^{\infty} e^{-\lambda^2}\, d\lambda.$$

Telle est l'expression de la *probabilité totale du second genre*.

Si l'on différentie $P_{\mu,m}$ par rapport à μ, on obtient $\Pi_{\mu,m}$, résultat évident.

La valeur de $P_{\mu,m}$ se calcule immédiatement par les Tables de Kramp.

Lorsque le jeu est uniforme et quelconque, on a

$$P_{\mu,m} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{m+\mu\psi_1}{\sqrt{\mu\varphi_1}}}^{\infty} e^{-\lambda^2}\, d\lambda + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{4m\psi_1}{\varphi_1}} \int_{\frac{m-\mu\psi_1}{\sqrt{\mu\varphi_1}}}^{\infty} e^{-\lambda^2}\, d\lambda.$$

Lorsque le jeu est équitable, $k = 0$ et la valeur de $P_{\mu,m}$ se réduit à celle que nous avons déjà obtenue (n° **27**).

55. Supposons qu'aucune limite ne soit fixée pour la durée du jeu; si celui-ci est avantageux, c'est-à-dire si k est positif et si de plus $\varphi(\mu)$

croît vers l'infini avec μ, on a

$$\mathrm{P}_{\infty,m} = e^{-4mk}.$$

Cette probabilité ne dépend pas de la fonction $\varphi(\mu)$.

Si k est négatif et si $\varphi(\mu)$ croît indéfiniment, on a $\mathrm{P}_{\infty,m} = 1$.

Enfin, si $\varphi(\mu)$ ne tend pas vers l'infini avec μ, on a

$$\mathrm{P}_{\infty,m} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{m+k\varphi(\infty)}{\sqrt{\varphi(\infty)}}}^{\infty} e^{-\lambda^2}\,d\lambda + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-4mk} \int_{\frac{m-k\varphi(\infty)}{\sqrt{\varphi(\infty)}}}^{\infty} e^{-\lambda^2}\,d\lambda.$$

Si, en particulier, le jeu est uniforme, la probabilité tend vers $e^{-4m\frac{\psi_1}{\varphi_1}}$ ou vers un, suivant que ψ_1 est positif ou négatif (ou nul).

Durée moyenne.

56. La durée moyenne d'un jeu est l'espérance mathématique d'un joueur H qui toucherait une somme égale au nombre des parties jouées.

Nous supposons qu'aucune limite ne soit fixée pour la durée du jeu. Si k est positif, c'est-à-dire si le jeu est avantageux, la durée moyenne est infinie, car nous venons de voir qu'il existe alors une probabilité finie pour que le jeu ne se termine pas. Si k est négatif ou nul, la durée moyenne est exprimée par l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \mu \Pi \, d\mu = \int_0^{\infty} \frac{\mu m \varphi'(\mu) e^{-\frac{[k\varphi(\mu)+m]^2}{\varphi(\mu)}}}{\sqrt{\pi}\,\varphi(\mu)\sqrt{\varphi(\mu)}}\,d\mu.$$

On ne peut la calculer sans préciser la fonction $\varphi(\mu)$. Si le jeu est uniforme, en remplaçant $\varphi(\mu)$ par $\mu\varphi_1$ et k par $\frac{\psi_1}{\varphi_1}$ et en posant $m^2 = \mu\varphi_1\lambda^2$, l'intégrale se ramène à l'une de celles que nous avons établies et la durée moyenne a pour valeur $-\frac{m}{\psi_1}$.

Lorsque le jeu est équitable et uniforme, la durée moyenne est infinie.

Distribution des probabilités.

57. La connaissance de la probabilité Π, pour que la ruine ait lieu à une partie indiquée, ne résout pas d'une façon complète le problème que nous nous sommes proposé; il nous reste à étudier les probabilités relatives aux cas où le joueur n'est pas ruiné.

Nous allons donc chercher la probabilité pour que, à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, le joueur ait perdu la somme $m-y$.

Si le joueur ne pouvait être ruiné, la probabilité pour que sa perte soit $m-y$ à la $\mu^{\text{ième}}$ partie serait

$$\varpi_{0,\mu,m-y} = \frac{e^{-\frac{[k\varphi(\mu)+m-y]^2}{\varphi(\mu)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi(\mu)}}.$$

La probabilité cherchée est égale à cette quantité diminuée d'une quantité correspondant à la possibilité de la ruine du joueur avant la $\mu^{\text{ième}}$ partie, quantité que nous allons calculer.

Si le joueur supposé ruiné à la $\mu_1{}^{\text{ième}}$ partie pouvait continuer à jouer, la probabilité, pour que, dans les $\mu-\mu_1$ parties suivantes, il gagne la somme y, et pour que, par suite, sa perte soit $m-y$ à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, serait $\varpi_{\mu_1,\mu,-y}$.

D'autre part, la probabilité pour que le joueur soit ruiné à la $\mu_1{}^{\text{ième}}$ partie est $\Pi_{\mu_1,m}\,d\mu_1$.

La possibilité pour le joueur d'être ruiné à la $\mu_1{}^{\text{ième}}$ partie diminue donc, d'après le principe de la probabilité composée, la probabilité $\varpi_{0,\mu,m-y}$ de la quantité $\Pi_{\mu_1,m}\varpi_{\mu_1,\mu,-y}\,d\mu_1$, et, puisque μ_1 peut prendre toutes les valeurs de zéro à μ, la probabilité cherchée est, en vertu du principe des probabilités totales,

$$\varpi_{0,\mu,m-y} - \int_0^{\mu} \Pi_{\mu_1,m} \times \varpi_{\mu_1,\mu,-y}\,d\mu_1.$$

L'intégrale est une de celles que nous avons étudiées (n° **50**). Finalement, la probabilité pour que la perte soit $m-y$ à la $\mu^{\text{ième}}$ partie

est

$$\frac{e^{-\frac{[k\varphi(\mu)+m-y]^2}{\varphi(\mu)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi(\mu)}} - \frac{e^{-\frac{[k\varphi(\mu)+m+y]^2}{\varphi(\mu)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi(\mu)}} e^{4ky},$$

on peut l'écrire

$$\varpi_{\mu,m-y} - \varpi_{\mu,m+y}\, e^{4ky}.$$

Nous connaissons maintenant les probabilités relatives à tous les cas possibles, c'est-à-dire la distribution des probabilités.

Lorsque le jeu est équitable, la formule se réduit à $\varpi_{\mu,m-y} - \varpi_{\mu,m+y}$; elle peut être obtenue par simple raison de symétrie. (Consulter mon Ouvrage *Sur la théorie de la spéculation*, p. 65.)

La distribution des probabilités étant connue, il est facile par des intégrations de calculer la probabilité pour que le joueur gagne, la probabilité pour qu'il perde une somme comprise entre zéro et m, et enfin l'espérance positive et l'espérance négative.

Par des changements de variables très simples, on rend les formules calculables par les Tables de Kramp.

Probabilités connexes du second genre.

58. Nous dirons qu'il y a connexité du second genre quand les conditions du jeu à chaque partie dépendent de la perte maxima antérieure du joueur.

Nous supposerons que le jeu soit uniforme, équitable et caractérisé à chaque partie par la fonction d'instabilité $\varphi(x)$ relative à cette partie, x désignant la perte maxima atteinte avant la partie considérée.

Si le joueur possède la fortune m, la probabilité pour que sa ruine ait lieu à la $\mu^{\text{ième}}$ partie est exprimée par la formule

$$\Pi_{\mu,m} = \frac{\int_0^m \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}}}{\sqrt{\pi}\,\mu\sqrt{\mu}}\, e^{-\frac{\left[\int_0^m \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}}\right]^2}{\mu}}\, d\mu.$$

Pour démontrer cette formule, on suppose d'abord que l'intervalle

zéro, m est divisé en deux intervalles : zéro, m_1, et m_1, m, la fonction d'instabilité ayant la valeur φ_1 tant que la perte est inférieure à m_1, puis la valeur $\varphi(m_1)$ dès que la perte m_1 est atteinte.

La probabilité pour que la ruine ait lieu à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, la perte m_1 ayant été pour la première fois atteinte à la $\mu_1^{\text{ième}}$ partie, est, d'après le principe des probabilités composées,

$$\Pi_{\mu_1, m_1, \varphi_1} \times \Pi_{\mu - \mu_1, m - m_1, \varphi(m_1)},$$

et la probabilité pour que la ruine ait lieu à la $\mu^{\text{ième}}$ partie est, d'après le principe des probabilités totales,

$$\int_0^{\mu} \Pi_{\mu_1, m_1, \varphi_1} \times \Pi_{\mu - \mu_1, m - m_1, \varphi(m_1)} \, d\mu_1.$$

L'intégration s'effectue par les formules que nous avons établies au n° **29**.

On suppose ensuite que l'intervalle zéro, m est divisé en trois, en quatre... intervalles, et finalement en une infinité. On obtient ainsi la formule ci-dessus.

39. La probabilité $P_{\mu,m}$, pour que la ruine ait lieu en μ parties, s'obtient en intégrant $\Pi_{\mu,m}$ entre zéro et μ. En posant

$$\frac{1}{\mu}\left[\int_0^m \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}}\right]^2 = \lambda^2,$$

on a

$$P_{\mu,m} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\mu}}\int_0^m \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}}} e^{-\lambda^2} \, d\lambda.$$

Cette formule se calcule par les Tables de Kramp dès que l'intégration de la limite supérieure est effectuée.

Si aucune limite n'est fixée pour la durée du jeu, $P_{\infty,m}$ a pour valeur un, la ruine du joueur est certaine. La durée moyenne du jeu est infinie.

40. Nous supposons maintenant que le joueur possède une fortune

infinie, qu'il joue à un jeu équitable et que, à chaque partie, les conditions du jeu dépendent de la perte maxima obtenue avant cette partie. Quelle est la probabilité pour que ce joueur perde la somme z en jouant μ parties?

Nous désignerons comme ci-dessus par $\varphi(x)$ la fonction d'instabilité relative à une partie quand la perte maxima antérieure est x.

Une analyse qu'il serait trop long de reproduire conduit au résultat suivant : La probabilité pour que le joueur ait perdu la somme z en μ parties est

$$\int_z^\infty \frac{4\left[\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}} + \frac{x-z}{\sqrt{\varphi(x)}}\right]}{\sqrt{\pi}\,\mu\sqrt{\mu}\,\varphi(x)} e^{-\frac{1}{\mu}\left[\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}} + \frac{x-z}{\sqrt{\varphi(x)}}\right]^2} dx.$$

La probabilité pour que le joueur ait gagné la somme z' est

$$\int_0^\infty \frac{4\left[\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}} + \frac{x+z'}{\sqrt{\varphi(x)}}\right]}{\sqrt{\pi}\,\mu\sqrt{\mu}\,\varphi(x)} e^{-\frac{1}{\mu}\left[\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}} + \frac{x+z'}{\sqrt{\varphi(x)}}\right]^2} dx.$$

Ces deux formules donnent la solution du problème proposé. Supposons, par exemple, que $\varphi(x)$ ait une valeur constante φ_1 dans l'intervalle zéro, m et que $\varphi(x)$ devienne nul (et, par suite, que le jeu cesse) dès que x atteint la valeur m. Pour obtenir la probabilité du gain z', on doit considérer la seconde formule et effectuer l'intégration entre zéro et m. En posant dans le résultat $y = m + z'$, on obtient la probabilité pour que la perte soit $m - y$, c'est

$$\frac{e^{-\frac{(m-y)^2}{\mu\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu\varphi_1}} - \frac{e^{-\frac{(m+y)^2}{\mu\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu\varphi_1}} = \varpi_{\mu,m-y} - \varpi_{\mu,m+y},$$

résultat précédemment obtenu (nº **37**).

41. Jusqu'ici, nous avons supposé le jeu équitable; nous ne traiterons relativement aux jeux non équitables que deux problèmes : celui qui consiste à chercher la probabilité totale de ruine quand aucune limite n'est assignée pour la durée du jeu et celui qui a pour but de

déterminer la durée moyenne du jeu quand aucune limite n'est fixée pour cette durée.

Occupons-nous du premier problème : le jeu est défini pour une partie par les quantités $\psi(x)$ et $\varphi(x)$ qui expriment l'espérance et la fonction d'instabilité relatives à cette partie. x est la perte maxima antérieure à la partie considérée.

La probabilité totale de ruine est

$$\mathrm{P}_{\infty,m} = e^{-2\int_0^m \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} dx}.$$

Dans l'intégrale doivent figurer uniquement des éléments positifs; ceux qui sont négatifs doivent être considérés comme nuls.

Pour démontrer cette formule, on suppose que l'intervalle zéro, m est divisé en deux intervalles, puis en trois, ..., puis en une infinité. Le raisonnement est analogue à celui du n° **38**.

42. Nous allons maintenant déterminer la durée moyenne : Il faut d'abord remarquer que, si les conditions du jeu sont telles que celui-ci puisse, à un moment quelconque, devenir équitable ou avantageux, la durée moyenne est infinie (n° **36**).

Nous devons donc nous borner au cas où le jeu est constamment désavantageux; alors la durée moyenne est exprimée par l'intégrale

$$-\int_0^m \frac{dx}{\psi(x)}.$$

Pour le démontrer, on suppose l'intervalle zéro, m divisé en un nombre infini d'intervalles dx; les durées moyennes relatives à chacun de ces intervalles s'ajoutent; or, la durée moyenne entre les pertes maxima x et $x + dx$ est $-\frac{dx}{\psi(x)}$ (n° **36**); la durée moyenne totale a donc bien la valeur ci-dessus.

PROBABILITÉS DU TROISIÈME GENRE.

43. D'après notre classification, on dit que les probabilités sont du troisième genre quand elles sont relatives à une variable x qui exprime

les gains ou les pertes d'un joueur, cette quantité x étant limitée dans les deux sens.

Nous supposerons donc un joueur A possédant la fortune m, jouant contre un adversaire B possédant la fortune n, chacun des joueurs devant régler les différences après chaque partie.

Si μ parties doivent être jouées au maximum, trois cas peuvent se présenter : Le joueur A peut être ruiné, le joueur B peut être ruiné, ou enfin les deux joueurs peuvent n'être ruinés ni l'un ni l'autre.

Les principaux problèmes que nous aurons à résoudre sont les suivants :

1° Quelle est la probabilité $\Pi_{\mu,m,n}$ pour que le joueur A soit ruiné exactement à la $\mu^{\text{ième}}$ partie?

La probabilité $\Pi_{\mu,m,n}$ est la probabilité élémentaire du troisième genre.

La probabilité pour que le joueur B soit ruiné exactement à la $\mu^{\text{ième}}$ partie s'exprime par $\Omega_{\mu,n,m}$.

$\Pi_{\mu,m,n}$ et $\Omega_{\mu,n,m}$ se déduisent l'un de l'autre en substituant m à n et n à m, et en remarquant que les conditions du jeu relatives au joueur B sont l'inverse des conditions relatives au joueur A.

Lorsque le jeu est symétrique, on peut écrire simplement $\Pi_{\mu,n,m}$ au lieu de $\Omega_{\mu,n,m}$.

La probabilité pour que le jeu prenne fin à la $\mu^{\text{ième}}$ partie est $\Pi_{\mu,m,n} + \Omega_{\mu,n,m}$.

2° Quelle est la probabilité $P_{\mu,m,n}$ pour que le joueur A soit ruiné en μ parties? $P_{\mu,m,n}$ est la probabilité du troisième genre.

Les probabilités $P_{\mu,m,n}$ et $\Pi_{\mu,m,n}$ se déduisent l'une de l'autre, on a

$$P_{\mu,m,n} = \int_0^\mu \Pi_{\mu,m,n}\, d\mu \qquad \text{et} \qquad \Pi_{\mu,m,n} = \frac{\partial P_{\mu,m,n}}{\partial\mu}.$$

La probabilité pour que le joueur B soit ruiné en μ parties se désigne par $Q_{\mu,n,m}$, on a évidemment

$$Q_{\mu,n,m} = \int_0^\mu \Omega_{\mu,n,m}\, d\mu, \qquad \text{et} \qquad \Omega_{\mu,n,m} = \frac{\partial Q_{\mu,n,m}}{\partial\mu}.$$

La probabilité pour que le jeu prenne fin avant μ parties est

$P_{\mu,m,n} + Q_{\mu,n,m}$. La probabilité pour que le jeu ne soit pas terminé en μ parties est $1 - P_{\mu,m,n} - Q_{\mu,n,m}$.

Probabilité élémentaire.

44. Nous supposerons que le jeu dont il s'agit est celui qui a été décrit au n° **31** et qui est plus général qu'un jeu uniforme quelconque et qu'un jeu équitable non uniforme.

Nous résoudrons d'abord le problème suivant :

Le joueur A *possédant la somme m et le joueur* B *la somme n, quelle est la probabilité pour que le jeu se termine à la* $\mu^{\text{ième}}$ *partie par la ruine du joueur* A ?

Si le joueur B possédait une fortune infinie, la probabilité de ruine du joueur A à la $\mu^{\text{ième}}$ partie serait (n° **35**)

$$\Pi_{\mu,m,\infty} = \frac{m\varphi'(\mu)e^{-\frac{[k\varphi(\mu)+m]^2}{\varphi(\mu)}}}{\sqrt{\pi}\,\varphi(\mu)\sqrt{\varphi(\mu)}}.$$

Lorsque le joueur B possède la somme n, la probabilité cherchée a pour valeur

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu,m,n} = \Pi_{\mu,m,\infty} &- e^{4nk}\Pi_{\mu,m+2n,\infty} \\ &+ e^{(4m+4n)k}\,\Pi_{\mu,3m+2n,\infty} - e^{(4m+8n)k}\,\Pi_{\mu,3m+4n,\infty} \\ &+ e^{(8m+8n)k}\,\Pi_{\mu,5m+4n,\infty} - e^{(8m+12n)k}\,\Pi_{\mu,5m+6n,\infty} + \ldots\end{aligned}$$

En effet, la probabilité $\Pi_{\mu,m,n}$ est égale à la probabilité $\Pi_{\mu,m,\infty}$ diminuée de la probabilité relative aux cas où le joueur B est ruiné avant la fin des μ parties.

Le joueur B peut être ruiné à la partie d'ordre μ_1, $(\mu_1 < \mu)$, cette éventualité, d'après le principe de la probabilité composée diminue $\Pi_{\mu,m,\infty}$ de la quantité $\Omega_{\mu_1,n,m} \times \Pi_{\mu_1,\mu,(n+m),\infty}$, car, si le joueur B, ruiné à la $\mu_1^{\text{ième}}$ partie, pouvait continuer à jouer, la probabilité pour qu'il ruinât le joueur A à la $\mu^{\text{ième}}$ partie serait $\Pi_{\mu_1,\mu,m+n,\infty}$.

La ruine du joueur B pouvant avoir lieu depuis $\mu_1 = 0$ jusqu'à

$\mu_1 = \mu$, la possibilité de la ruine antérieure du joueur B diminue la probabilité $\Pi_{\mu.m,\infty}$ de la quantité

$$\int_0^{\mu} \Omega_{\mu_1,n,m} \times \Pi_{\mu_1,\mu,m+n,\infty}\, d\mu_1.$$

On doit donc avoir

$$\Pi_{\mu,m,n} = \Pi_{\mu,m,\infty} - \int_0^{\mu} \Omega_{\mu_1,n,m} \times \Pi_{\mu_1,\mu,m+n,\infty}\, d\mu_1.$$

Telle est l'équation de condition à laquelle doit satisfaire la fonction Π.

On vérifie sans grande difficulté qu'elle devient identique si l'on remplace les quantités Π par leur valeur. $\Omega_{\mu_1,n,m}$ s'obtient en remplaçant dans l'expression de $\Pi_{\mu_1,m,n}$ m par n, n par m et k par $-k$.

L'équation contient une suite d'intégrales analogues à celles que nous avons étudiées (nº **29**) ; je ne crois pas utile d'en écrire les formules, qui sont quelque peu compliquées.

L'expression que nous avons donnée pour $\Pi_{\mu,m,n}$ est donc exacte, on doit remarquer qu'elle est proportionnelle à $\varphi'(\mu)$, c'est-à-dire à l'instabilité de la dernière partie et qu'elle est indépendante de l'ordre des parties antérieures.

On voit que les probabilités du troisième genre s'expriment par des séries de probabilités du second genre.

Lorsque le jeu est équitable, $k = 0$ et l'expression de la probabilité $\Pi_{\mu,m,n}$ se réduit à

$$\Pi_{\mu,m,n} = \Pi_{\mu,m,\infty} - \Pi_{\mu,m+2n,\infty} + \Pi_{\mu,3m+2n,\infty} - \cdots,$$

formule que l'on peut démontrer par simple raison de symétrie, en suivant un raisonnement analogue à celui que j'ai employé autrefois (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1901, p. 201).

Probabilité totale.

45. *Le joueur A possédant la somme m et le joueur B la somme n, quelle est la probabilité pour que le jeu se termine avant μ parties par la ruine du joueur A ?*

La probabilité cherchée, dite *probabilité du troisième genre* $P_{\mu,m,n}$, s'obtient en intégrant $\Pi_{\mu,m,n}$ entre zéro et μ ; on a donc

$$P_{\mu,m,n} = P_{\mu,m,\infty} - e^{4nk} P_{\mu,m+2n,\infty} + e^{4(m+n)k} P_{\mu,3m+2n,\infty}$$
$$- e^{(4m+8n)k} P_{\mu,3m+4n,\infty} + e^{(8m+8n)k} P_{\mu,5m+4n,\infty} - e^{(8m+12n)k} P_{\mu,5m+6n,\infty} + \ldots .$$

Les quantités $P_{\mu,z,\infty}$ se calculent par la formule du n° **54**

$$P_{\mu,z,\infty} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{z+k\varphi(\mu)}{\sqrt{\varphi(\mu)}}}^{\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda + \frac{e^{-4kz}}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{z-k\varphi(\mu)}{\sqrt{\varphi(\mu)}}}^{\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda,$$

dont la valeur numérique s'obtient par les Tables de Kramp.

46. Si aucune limite n'est fixée pour la durée du jeu, quelle est la probabilité de la ruine du joueur A ?

Si $\varphi(\mu)$ tend, lorsque μ devient infini, vers une limite fixe, $\varphi(\infty)$, les formules précédentes font connaître la valeur de $P_{\infty,m,n}$, il suffit d'y remplacer $\varphi(\mu)$ par $\varphi(\infty)$.

Si $\varphi(\mu)$ tend vers l'infini (comme nous le supposerons toujours dans la suite) et si le jeu est avantageux pour le joueur A, $(k > 0)$, on a

$$P_{\infty,z,\infty} = e^{-4kz},$$

et, par suite,

$$P_{\infty,m,n} = e^{-4mk} - e^{-4(m+n)k} + e^{-(8m+4n)k}$$
$$- e^{-(8m+8n)k} + e^{-(12m+8n)k} - \ldots .$$

Les termes de rang pair forment une progression géométrique de même que les termes de rang impair. La probabilité de ruine est

$$P_{\infty,m,n} = \frac{e^{-4mk} - e^{-4(m+n)k}}{1 - e^{-4(m+n)k}}.$$

La probabilité de ruine du joueur B est

$$Q_{\infty,n,m} = \frac{1 - e^{-4mk}}{1 - e^{-4(m+n)k}}.$$

Ces probabilités ne dépendent pas de la fonction $\varphi(\mu)$. Si k est

négatif, le jeu avantage le joueur B et les probabilités s'obtiennent sans plus de difficulté.

47. On est conduit au même résultat en employant le raisonnement suivant, applicable également lorsqu'il y a discontinuité.

Nous supposons que le jeu est uniforme et qu'il avantage le joueur A. Si le joueur B avait une fortune infinie, la probabilité de ruine du joueur A serait $P_{x,m,x}$.

Pour obtenir la probabilité $P_{x,m,n}$ de ruine du joueur A quand le joueur B possède la somme n, on doit de $P_{x,m,x}$ retrancher les probabilités correspondant aux cas où le joueur B d'abord ruiné aurait ensuite ruiné le joueur A si le jeu avait pu se continuer, c'est-à-dire retrancher

$$(1 - P_{x,m,n})P_{x,m+n,x}.$$

En effet, aucune limite n'étant assignée pour la durée du jeu, la probabilité pour que B soit ruiné avant A est la probabilité totale de ruine de B, c'est-à-dire $1 - P_{x,m,n}$, et, d'autre part, la probabilité de ruine du joueur A quand il possède la somme $m+n$ est bien $P_{x,m+n,x}$. On a donc

$$P_{x,m,n} = \frac{P_{x,m,x} - P_{x,m+n,x}}{1 - P_{x,m+n,x}}.$$

Cette formule est exacte qu'il y ait continuité ou non, elle n'exige pas la connaissance des probabilités $P_{x,z,x}$.

S'il n'y avait pas uniformité, la formule serait encore exacte, mais il faudrait d'abord démontrer que $P_{x,m,n} + Q_{x,n,m} = 1$ et que, de plus, $P_{x,z,x}$ est indépendant de μ.

Si, dans la formule qui précède, on remplace les quantités P par leur valeur (n° 55), on obtient le même résultat que précédemment.

48. Lorsque le jeu est équitable, $k=0$ et les formules deviennent indéterminées; en leur appliquant la règle connue, on obtient

$$P_{x,m,n} = \frac{n}{m+n}, \qquad Q_{x,n,m} = \frac{m}{m+n}.$$

Ce résultat se démontre directement d'une manière fort simple par

la considération de l'espérance mathématique. Le jeu étant équitable, l'espérance du joueur A est nulle, or cette espérance est

$$n\mathrm{P}_{\infty,n,m} - m\mathrm{Q}_{\infty,n,m};$$

comme $\mathrm{P}_{\infty,m,n} + \mathrm{Q}_{\infty,n,m}$ est un, le résultat précédent est démontré.

Il serait encore vrai dans le cas d'un jeu constamment équitable et connexe, après cependant que l'on aurait démontré l'égalité

$$\mathrm{P}_{\infty,m,n} + \mathrm{Q}_{\infty,n,m} = 1.$$

Durée moyenne.

49. Supposons que le jeu soit uniforme et désavantageux pour le joueur A, $(\psi_1 < 0)$.

Soit $\mathrm{U}_{m,n}$ la durée moyenne cherchée; si le joueur B avait une fortune infinie, la durée moyenne du jeu serait $\mathrm{U}_{m,\infty}$. Le fait de la ruine possible du joueur B diminue cette durée moyenne $\mathrm{U}_{m,\infty}$ d'une quantité que nous allons déterminer.

La probabilité pour que le joueur B soit ruiné est $\mathrm{Q}_{\infty,n,m}$ et au moment où il est ruiné, s'il pouvait continuer à jouer possédant une fortune infinie, la durée moyenne du jeu serait $\mathrm{U}_{m+n,\infty}$.

La possibilité de la ruine du joueur B diminue donc la durée moyenne de la quantité $\mathrm{Q}_{\infty,n,m} \times \mathrm{U}_{m+n,\infty}$. Cette durée moyenne est donc

$$\mathrm{U}_{m,n} = \mathrm{U}_{m,\infty} - \mathrm{Q}_{\infty,n,m}\,\mathrm{U}_{m+n,\infty}.$$

Cette formule, dont on peut remarquer la simplicité, ne suppose pas la connaissance des quantités $\mathrm{U}_{m,\infty}$, $\mathrm{U}_{m+n,\infty}$ ni celle des probabilités P et Q.

Elle est exacte, que les probabilités soient continues ou discontinues.

Les quantités $\mathrm{U}_{m,\infty}$ et $\mathrm{U}_{m+n,\infty}$ ont respectivement pour valeur $-\frac{m}{\psi_1}$ et $-\frac{m+n}{\psi_1}$. On a (n° 46)

$$\mathrm{Q}_{\infty,n,m} = \frac{e^{\frac{2n\psi_1}{\varphi_1}} - e^{\frac{2(m+n)\psi_1}{\varphi_1}}}{1 - e^{\frac{2(m+n)\psi_1}{\varphi_1}}}.$$

La substitution de ces valeurs dans la formule précédente donne l'expression explicite de la durée moyenne.

Lorsque le jeu est équitable, $\psi_1 = 0$ et l'expression de la durée moyenne prend la forme $\frac{0}{0}$; en lui appliquant deux fois de suite la règle connue, on trouve

$$\frac{2mn}{\varphi_1}.$$

La durée moyenne est proportionnelle au produit des fortunes des joueurs et inversement proportionnelle à la fonction d'instabilité.

Distribution des probabilités.

50. Il nous resterait à étudier la distribution des probabilités et l'espérance mathématique.

Les formules relatives à ces questions présentant quelque complication, nous nous contenterons de faire connaître le résultat.

Si le jeu est uniforme, la probabilité pour que, à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, aucun des joueurs n'étant ruiné, le joueur A ait perdu la somme x, est

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{\mu\varphi_1}}\Bigg[e^{-\frac{(x+\mu\psi_1)^2}{\mu\varphi_1}} - e^{\frac{4\psi_1(m-x)}{\varphi_1}}\,e^{-\frac{(2m-x+\mu\psi_1)^2}{\mu\varphi_1}}$$
$$+ e^{\frac{4\psi_1(m+n-x)}{\varphi_1}}\,e^{-\frac{(2m+2n-x+\mu\psi_1)^2}{\mu\varphi_1}} - e^{\frac{4\psi_1(2m+n-x)}{\varphi_1}}\,e^{-\frac{(4m+2n-x+\mu\psi_1)^2}{\mu\varphi_1}} + \ldots$$
$$- e^{\frac{4\psi_1(n+x)}{\varphi_1}}\,e^{-\frac{(2n+x-\mu\psi_1)^2}{\mu\varphi_1}} + e^{-\frac{4\psi_1(n+m+x)}{\varphi_1}}\,e^{-\frac{(2n+2m+x-\mu\psi_1)^2}{\mu\varphi_1}}$$
$$- e^{-\frac{4\psi_1(2n+m+x)}{\varphi_1}}\,e^{-\frac{(4m+2n+x-\mu\psi_1)^2}{\mu\varphi_1}} + \ldots\Bigg].$$

Avant de passer à d'autres questions, une remarque n'est peut-être pas inutile : nous avons résolu d'une façon complète tous les problèmes de la théorie générale du jeu relatifs aux cas de deux joueurs en admettant que le jeu soit uniforme ou qu'il soit équitable et quelconque. La théorie de ces jeux, qui constitue la question la plus importante au point de vue mathématique du calcul des probabilités, peut donc être considérée comme entièrement connue et comme arrivée aujourd'hui à un degré de perfection qui semble définitif.

PROBABILITÉS A PLUSIEURS VARIABLES.

51. Comme nous l'avons remarqué au début de cette étude et comme l'ont déjà démontré les résultats qui précèdent, c'est par l'assimilation de toute question de probabilité à un problème relatif à un jeu que l'on obtient la généralité la plus grande. La théorie des probabilités à plusieurs variables sera donc dans ses questions les plus générales la théorie d'un jeu, les autres problèmes qu'elle traitera et qui paraîtront les plus importants et les plus curieux seront en réalité des cas particuliers. Ramener toutes les questions à un type unique, tel est un des principes de la théorie des probabilités continues.

Nous résoudrons d'abord le problème suivant :

Trois joueurs A, B, C *possédant chacun une fortune infinie doivent jouer* μ *parties, quelle est la probabilité pour que le joueur* A *perde la somme* x *et le joueur* B *la somme* y ?

Nous supposerons qu'il y a indépendance, c'est-à-dire que les conditions du jeu à chaque partie ne dépendent pas des résultats antérieurs du jeu, mais *nous ne supposerons pas l'uniformité,* les conditions du jeu pourront varier d'une partie à l'autre d'après une loi quelconque dépendant seulement du rang occupé par la partie considérée.

A chaque partie, par exemple à la $\mu^{\text{ième}}$, le jeu sera caractérisé : pour le joueur A par son espérance totale $\psi_1'(\mu)$ relative à cette $\mu^{\text{ième}}$ partie et par la fonction d'instabilité $\varphi_1'(\mu)$ relative à la même partie.

De même pour le joueur B, le jeu sera caractérisé à la $\mu^{\text{ième}}$ partie par les fonctions $\psi_2'(\mu)$ et $\varphi_2'(\mu)$ et pour le joueur C par les fonctions $\psi_3'(\mu)$ et $\varphi_3'(\mu)$.

Nous désignerons par $f(\mu_1, \mu_2, x, y)$ la probabilité pour que le joueur A perde la somme x et le joueur B la somme y entre les parties μ_1 et μ_2.

La probabilité pour que, à la $\mu_1{}^{\text{ième}}$ partie, le joueur A ait perdu la somme x_1 et le joueur B la somme y_1 est $f(0, \mu_1, x_1, y_1)$.

La probabilité pour que, entre la $\mu_1^{\text{ième}}$ et la $\mu^{\text{ième}}$ partie, le joueur A ait perdu la somme $x - x_1$ et le joueur B la somme $y - y_1$ est

$$f(\mu_1, \mu, x - x_1, y - y_1).$$

La probabilité pour que, à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, le joueur A ait perdu la somme x et le joueur B la somme y, les pertes de ces joueurs ayant été x_1, y_1 à la $\mu_1^{\text{ième}}$ partie, est, en vertu du principe des probabilités composées, $f(o, \mu_1, x_1, y_1) \times f(\mu_1, \mu, x - x_1, y - y_1)$.

Les pertes x_1, y_1 ayant pu, à la $\mu_1^{\text{ième}}$ partie, avoir toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$, la probabilité $f(o, \mu, x, y)$ pour que, à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, le joueur A perde la somme x et le joueur B la somme y est, en vertu du principe des probabilités totales,

$$\begin{aligned} f(o, \mu, x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} & f(o, \mu_1, x_1, y_1) \\ & \times f(\mu_1, \mu, x - x_1, y - y_1)\, dx_1\, dy_1. \end{aligned}$$

Telle est l'équation de condition à laquelle doit satisfaire la fonction f.

La somme des probabilités de tous les cas possibles doit avoir pour valeur *un*; la fonction f relative à un intervalle μ_1, μ_2 quelconque doit donc vérifier l'égalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\mu_1, \mu_2, x, y)\, dx\, dy = 1.$$

52. Ces conditions sont vérifiées par la fonction

$$\begin{aligned} & f(\mu_1, \mu_2, x, y) \\ & = \frac{2}{\pi K} e^{-\frac{1}{K^2}\left\{\left[x + \int_{\mu_1}^{\mu_2} \psi_1'(\mu)\, d\mu\right]^2 \int_{\mu_1}^{\mu_2} \varphi_2'(\mu)\, d\mu - \left[x + \int_{\mu_1}^{\mu_2} \psi_1'(\mu)\, d\mu\right]\left[y + \int_{\mu_1}^{\mu_2} \psi_2'(\mu)\, d\mu\right]\int_{\mu_1}^{\mu_2}[\varphi_1'(\mu) + \varphi_2'(\mu) - \varphi_3'(\mu)]\, d\mu + \left[y + \int_{\mu_1}^{\mu_2} \psi_2'(\mu)\, d\mu\right]^2 \int_{\mu_1}^{\mu_2} \varphi_1'(\mu)\, d\mu\right\}}. \end{aligned}$$

La quantité K^2 ayant pour valeur

$$\begin{aligned} K^2 = \;& 2\left[\int_{\mu_1}^{\mu_2} \varphi_1'(\mu)\, d\mu\right]\left[\int_{\mu_1}^{\mu_2} \varphi_2'(\mu)\, d\mu\right] + 2\left[\int_{\mu_1}^{\mu_2} \varphi_1'(\mu)\, d\mu\right]\left[\int_{\mu_1}^{\mu_2} \varphi_3'(\mu)\, d\mu\right] \\ & + 2\left[\int_{\mu_1}^{\mu_2} \varphi_2'(\mu)\, d\mu\right]\left[\int_{\mu_1}^{\mu_2} \varphi_3'(\mu)\, d\mu\right] \\ & - \left[\int_{\mu_1}^{\mu_2} \varphi_1'(\mu)\, d\mu\right]^2 - \left[\int_{\mu_1}^{\mu_2} \varphi_2'(\mu)\, d\mu\right]^2 - \left[\int_{\mu_1}^{\mu_2} \varphi_3'(\mu)\, d\mu\right]^2. \end{aligned}$$

La vérification est quelque peu pénible, mais elle ne présente aucune sérieuse difficulté, elle s'effectue par la même intégrale que celle du n° 6.

S'il s'agit de la probabilité dans l'intervalle zéro, μ, on peut remplacer les intégrales telles que $\int_0^\mu \varphi'(\mu)\,d\mu$ par $\varphi(\mu)$ et finalement *la probabilité cherchée a pour valeur*

$$f(0, \mu, x, y) = \frac{2}{\pi} \frac{e^{-4\frac{\varphi_2(\mu)[x+\psi_1(\mu)]^2 + [\varphi_1(\mu)+\varphi_2(\mu)-\varphi_3(\mu)][x+\psi_1(\mu)][y+\psi_2(\mu)] + \varphi_1(\mu)[y+\psi_2(\mu)]^2}{2\varphi_1(\mu)\varphi_2(\mu)+2\varphi_1(\mu)\varphi_3(\mu)+2\varphi_2(\mu)\varphi_3(\mu)-\varphi_1^2(\mu)-\varphi_2^2(\mu)-\varphi_3^2(\mu)}}}{\sqrt{2\varphi_1(\mu)\varphi_2(\mu)+2\varphi_1(\mu)\varphi_3(\mu)+2\varphi_2(\mu)\varphi_3(\mu)-\varphi_1^2(\mu)-\varphi_2^2(\mu)-\varphi_3^2(\mu)}}\,dx\,dy.$$

Indépendance des fonctions d'instabilité.

35. La somme des trois espérances $\psi_1(\mu)$, $\psi_2(\mu)$, $\psi_3(\mu)$ est nulle quel que soit μ. Ce résultat est presque évident; pour le démontrer en se basant sur la formule précédente, il suffit d'écrire que la probabilité pour que A perde la somme x et B la somme y est la probabilité pour que A perde la somme x et C la somme $-(x+y)$.

Les fonctions d'instabilité $\varphi_1(\mu)$, $\varphi_2(\mu)$, $\varphi_3(\mu)$ dépendent des conditions du jeu, mais la connaissance de deux d'entre elles n'entraîne pas la connaissance de la troisième.

Supposons, par exemple, que le jeu se compose d'une seule partie, qu'il soit équitable et que $\varphi_1 = \varphi_2$. Dans ces conditions, φ_3 peut avoir toute valeur entre zéro et $4\varphi_1$.

La valeur limite $\varphi_3 = 0$ correspond au cas où les joueurs A et B jouent seuls entre eux, C ne jouant pas.

φ_3 peut avoir même valeur que φ_1 et φ_2, par exemple par la supposition que chacun des joueurs ait une chance sur trois de gagner la somme $\frac{\sqrt{3\varphi_1}}{2}$, une chance sur trois de perdre la même somme et une chance sur trois de faire partie nulle. Dans ces conditions, en effet, la fonction d'instabilité relative à chaque joueur est φ_1.

La valeur limite $\varphi_3 = 4\varphi_1$ serait obtenue en supposant que les joueurs A et B ne jouent pas entre eux, le joueur C faisant la contre-

partie de ces deux joueurs. En effet, soit $\zeta(u)\,du$ la probabilité pour que le joueur A perde la somme u. Si A perd la somme u, B perd également la somme u et C gagne la somme $2u$. Les fonctions d'instabilité relatives aux joueurs A et C sont donc, par définition,

$$\varphi_1 = 2\int u^2\zeta(u)\,du \qquad \text{et} \qquad \varphi_3 = 2\int (2u)^2\zeta(u)\,du = 4\varphi_1,$$

φ_3 peut donc prendre toute valeur entre φ_1 et $4\varphi_1$.

Un cas particulier intéressant est celui qui correspond à $\varphi_3 = 2\varphi_1$. On pourrait par exemple le réaliser en supposant que chacun des joueurs ait une chance sur trois de gagner : lorsque C gagnerait, il recevrait 1^{fr} de B et 1^{fr} de A. Lorsque A gagnerait il recevrait 1^{fr} de C et $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$ de B. Lorsque B gagnerait, il recevrait 1^{fr} de C et $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$ de A. Dans le cas considéré, on aurait

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 1 \qquad \text{et} \qquad \varphi_3 = 2 = 2\varphi_1.$$

La formule précédente qui fait connaître la probabilité $f(0, \mu_1, x, y)$ pour que le joueur A perde la somme x et le joueur B la somme y se réduit lorsque $\varphi_1 = \varphi_2$ et $\varphi_3 = 2\varphi_1$ au produit des probabilités qu'auraient séparément les joueurs A et B pour perdre les sommes x et y. Donc dans ce cas la connaissance de la perte de l'un des joueurs A ou B n'influe pas sur les probabilités relatives à l'autre joueur.

En résumé, dans le cas général, la connaissance de deux fonctions d'instabilité ne détermine pas la troisième.

Cas particuliers.

34. Lorsqu'il y a uniformité, les fonctions $\varphi_1(\mu)$, $\varphi_2(\mu)$, $\varphi_3(\mu)$ et $\psi_1(\mu)$, $\psi_2(\mu)$, $\psi_3(\mu)$ ont respectivement pour valeurs $\mu\varphi_1$, $\mu\varphi_2$, $\mu\varphi_3$, $\mu\psi_1$, $\mu\psi_2$, $\mu\psi_3$; φ_1, φ_2, φ_3 et ψ_1, ψ_2, ψ_3 étant les fonctions d'instabilité et les espérances relatives aux trois joueurs pour une partie ; alors

$$f(0, \mu, x, y) = \frac{2e^{-\frac{4[\varphi_2(x+\mu\psi_1)^2 + (\varphi_1+\varphi_2-\varphi_3)(x+\mu\psi_1)(y+\mu\psi_2) + \varphi_1(y+\mu\psi_2)^2]}{\mu(2\varphi_1\varphi_2 + 2\varphi_1\varphi_3 + 2\varphi_2\varphi_3 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2 - \varphi_3^2)}}}{\pi\mu\sqrt{2\varphi_1\varphi_2 + 2\varphi_1\varphi_3 + 2\varphi_2\varphi_3 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2 - \varphi_3^2}}\,dx\,dy.$$

Lorsque le jeu est équitable pour les trois joueurs, les fonctions ψ sont nulles. Lorsque le jeu est symétrique, c'est-à-dire égal pour les trois joueurs, il est nécessairement équitable et la fonction f a pour valeur

$$f(0, \mu, x, y) = \frac{2e^{-\frac{4}{3\varphi(\mu)}(x^2+xy+y^2)}}{\pi\sqrt{3}\,\varphi(\mu)}\,dx\,dy.$$

Surface de probabilité.

53. Supposons d'abord que le jeu soit équitable et uniforme, l'équation

$$z = \frac{2e^{-\frac{4}{\mu M^2}[\varphi_2 x^2 + (\varphi_1+\varphi_2-\varphi_3)xy + \varphi_1 y^2]}}{\pi\mu M},$$

qui exprime la probabilité pour que les pertes soient x et y (M^2 remplace la quantité $2\varphi_1\varphi_2 + 2\varphi_1\varphi_3 + 2\varphi_2\varphi_3 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2 - \varphi_3^2$), représente une surface dont chaque section passant par l'axe des z est une courbe de probabilité de la forme connue.

La surface de probabilité présente la forme d'une sorte de cloche elliptique reposant sur le plan des xy et en réalité asymptote à ce plan; elle se déforme très vite, car la hauteur de son sommet diminue proportionnellement à μ. Les coordonnées des points x, y qui ont même probabilité sont liées par l'équation

$$\varphi_2 x^2 + (\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3)xy + \varphi_1 y^2 = u^2.$$

Les courbes d'égale probabilité sur le plan des xy sont donc des ellipses homothétiques ayant l'origine pour centre.

A chaque valeur de u^2 correspond une couronne elliptique élémentaire et la probabilité sur cette couronne est

$$U = \frac{8e^{-\frac{4u^2}{\mu M^2}}u\,du}{\mu M^2}.$$

La probabilité entre l'ellipse u et l'infini a pour valeur $e^{-\frac{4u^2}{\mu M^2}}$.

La valeur moyenne de u est

$$\frac{\sqrt{\pi}}{4}\,\mathrm{M}\sqrt{\mu} = 0,4431\,\mathrm{M}\sqrt{\mu},$$

la valeur probable de u est

$$0,416\,\mathrm{M}\sqrt{\mu}.$$

La couronne élémentaire de probabilité maxima s'obtient en annulant la dérivée de U, ce qui donne

$$u = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\mathrm{M}\sqrt{\mu} = 0,353\,\mathrm{M}\sqrt{\mu}.$$

56. La surface de probabilité est à courbures de même sens dans le voisinage de son sommet et à courbures opposées près du plan asymptote $z = 0$, elle se compose donc de deux régions séparées par une ligne de points paraboliques. La projection de cette ligne sur le plan des xy a pour équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = 0$$

ou

$$\varphi_2 x^2 + (\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3)\,xy + \varphi_1 y^2 = \frac{\mu\mathrm{M}^2}{8}.$$

C'est l'équation d'une ellipse analogue à celles que nous avons considérées. Dans l'espace, la ligne des points paraboliques est donc une ligne de niveau de la surface de probabilité.

Il faut remarquer que la valeur de u correspondant à cette ellipse est la même que la valeur obtenue pour la couronne de probabilité maxima. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

La probabilité sur une couronne élémentaire est maxima quand cette couronne correspond à la ligne des points paraboliques de la surface de probabilité.

Ainsi se trouve généralisé le théorème relatif aux points d'inflexion de la courbe des probabilités quand il n'y a qu'une variable. (Consulter

mon *Étude sur la théorie de la spéculation*, p. 26, et les *Annales de l'École Normale*, 1901, p. 159.)

37. Considérons la probabilité comprise à l'intérieur de l'ellipse u

$$1 - e^{-\frac{4u^2}{\mu M^2}}.$$

Pour que cette probabilité reste constante lorsque μ croît, il faut que u^2 varie proportionnellement à μ.

En d'autres termes, les aires des ellipses isoprobables croissent proportionnellement à μ et les rayons homologues proportionnellement à $\sqrt{\mu}$. Ces rayons diminuent donc *relativement* à μ.

Si nous considérons une ellipse de grandeur fixe, la probabilité relative à cette ellipse décroît indéfiniment jusqu'à zéro lorsque μ croît.

38. Lorsque le jeu est uniforme et non équitable, la représentation géométrique des probabilités est toujours la même, mais la surface des probabilités est alors animée dans son ensemble d'un mouvement rectiligne qui est uniforme si l'on assimile la variable μ au temps.

Lorsque le jeu n'est pas uniforme, la surface de probabilité se déforme suivant des lois plus complexes qui dépendent des fonctions d'instabilité et des espérances; les axes des ellipses de probabilité ne sont plus fixes, leur orientation est variable. Si le jeu n'est pas équitable, la surface de probabilité est animée d'un mouvement de translation sans cesse variable, et les composantes de sa vitesse sont à chaque instant $\psi_1'(\mu)$ et $\psi_2'(\mu)$.

Si les fonctions d'instabilité ne croissent pas à l'infini avec μ, la surface de probabilité ne tend pas à se confondre avec le plan des xy, sa forme se rapproche sans cesse de celle d'une surface asymptote.

Généralisation de la théorie des épreuves répétées.

39. *Trois événements s'excluent mutuellement, leurs probabilités sont respectivement p_1, q_1, r_1 à la première épreuve, p_2, q_2, r_2 à la seconde, ..., p_μ, q_μ, r_μ à la $\mu^{\text{ième}}$. Quelle est la probabilité pour*

que, en μ épreuves, le premier se produise X fois et le second Y fois?

Supposons que trois joueurs A, B, C jouent aux conditions suivantes : A chacune des parties successives le joueur A a probabilité $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ pour perdre 1^{fr} et probabilité $(1-p_1), (1-p_2), \ldots, (1-p_\mu)$ pour gagner 2^{fr}.

Le joueur B a les probabilités $q_1, q_2, \ldots, q_\mu$ de perdre 1^{fr} et $(1-q_1), (1-q_2), \ldots, (1-q_\mu)$ de gagner 2^{fr}.

Le joueur C a les probabilités $r_1, r_2, \ldots, r_\mu$ de perdre 1^{fr} et $(1-r_1), (1-r_2), \ldots, (1-r_\mu)$ de gagner 2^{fr}.

$$(p_1 + q_1 + r_1 = 1,\ p_2 + q_2 + r_2 = 1,\ \ldots).$$

On suppose que, à chaque partie, l'un des joueurs gagne 2^{fr}, chacun des deux autres perdant 1^{fr}.

Chercher la probabilité pour que, en μ épreuves, l'événement qui a pour probabilités successives $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ se produise X fois et l'événement de probabilités $q_1, q_2, \ldots, q_\mu$, Y fois, revient à chercher la probabilité pour que, en μ parties, le joueur A ait perdu X parties et le joueur B, Y parties.

Or, si le joueur A a perdu X parties, il en a gagné $\mu - X$ et sa perte totale est

$$X - 2(\mu - X) = 3X - 2\mu.$$

Si le joueur B a perdu Y parties, sa perte totale est

$$3Y - 2\mu.$$

La question revient donc à chercher la probabilité pour que, en μ parties, le joueur A ait perdu la somme $3X - 2\mu$ et le joueur B, la somme $3Y - 2\mu$. La formule du n° **32** donne la solution de la question, on a

$$\begin{aligned}
&\psi_1(\mu) = \Sigma\varepsilon_1 = \Sigma[2(1-p) - p] = \Sigma(2-3p),\\
&\psi_2(\mu) = \Sigma(2-3q), \qquad \psi_3(\mu) = \Sigma(3p+3q-4),\\
&\varphi_1(\mu) = 2\Sigma(E_1^2 - \varepsilon_1^2)\\
&\qquad = 2\Sigma[p + 4(1-p) - (2-3p)^2] = \Sigma 18p(1-p),\\
&\varphi_2(\mu) = \Sigma 18q(1-q), \qquad \varphi_3(\mu) = \Sigma 18(1-p-q)(p+q).
\end{aligned}$$

La probabilité pour que l'événement de probabilités $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ se produise X fois et l'événement de probabilités $q_1, q_2, \ldots, q_\mu$, Y fois en μ épreuves est donc

$$\frac{2}{3\pi K}\, e^{-\frac{2}{K^2}\left[\Sigma q(1-q)(X-\Sigma p)^2+\Sigma 2pq(X-\Sigma p)(Y-\Sigma q)+\Sigma p(1-p)(Y-\Sigma q)^2\right]}\, dX\, dY,$$

K^2 désignant la quantité

$$\begin{aligned} K^2 = {} & 2[\Sigma p(1-p)][\Sigma q(1-q)] + 2[\Sigma p(1-p)][\Sigma r(1-r)] \\ & + 2[\Sigma q(1-q)][\Sigma r(1-r)] - [\Sigma p(1-p)]^2 \\ & - [\Sigma q(1-q)]^2 - [\Sigma r(1-r)]^2. \end{aligned}$$

60. La plus grande probabilité a lieu lorsque $X = \Sigma p$ et $Y = \Sigma q$. La valeur moyenne de X est Σp, la valeur moyenne de Y est Σq.

Les quantités Σp et Σq sont donc les valeurs normales des nombres des arrivées des événements. Si le premier événement se produit $\Sigma p \pm x$ fois et le second $\Sigma q \pm y$ fois, on dit que les *écarts* sont x et y.

La probabilité pour que les écarts soient $+x$ et $+y$ est

$$\frac{2}{3\pi K}\, e^{-\frac{2}{K^2}\left[x^2\Sigma q(1-q)+xy\Sigma 2pq+y^2\Sigma p(1-p)\right]}\, dx\, dy.$$

Cette formule généralise celle qui a été obtenue au n° **16**.

61. Elle se simplifie quand les épreuves sont identiques, elle devient alors

$$\frac{e^{-\frac{1}{2\mu pqr}\left[q(1-q)x^2+2pqxy+p(1-p)y^2\right]}}{2\pi\mu\sqrt{pqr}}\, dx\, dy.$$

La probabilité est susceptible d'être représentée géométriquement (n° **35**), si l'on considère les ellipses isoprobables, l'aire de celles-ci croît proportionnellement à μ, les rayons homologues croissent proportionnellement à $\sqrt{\mu}$ et décroissent donc *relativement* à μ. C'est une généralisation du théorème de Bernoulli.

Probabilités mêlées.

62. *La probabilité pour que l'événement A′ se produise seul est p_1 à la première épreuve, p_2 à la deuxième, ..., p_μ à la $\mu^{\text{ième}}$.*

La probabilité pour que l'événement B′ se produise seul est q_1 à la première épreuve, q_2 à la deuxième, ..., q_μ à la $\mu^{\text{ième}}$.

Il y a de même les probabilités successives $r_1, r_2, \ldots, r_\mu$ pour que les événements A′ et B′ se produisent tous deux et les probabilités $t_1, t_2, \ldots, t_\mu$ pour qu'aucun des événements ne se produise.

Quelle est la probabilité pour que, en μ épreuves, l'événement A′ se produise X fois et l'événement B′, Y fois?

Supposons que trois joueurs A, B, C jouent aux conditions suivantes : Le joueur A a successivement les probabilités $(p_1 + r_1)$, $(p_2 + r_2)$, ..., $(p_\mu + r_\mu)$ pour perdre 1fr et les probabilités $1 - p_1 - r_1$, $1 - p_2 - r_2, \ldots, 1 - p_\mu - r_\mu$ pour faire partie nulle.

Le joueur B a successivement les probabilités $(q_1 + r_1)$, $(q_2 + r_2)$, ..., $(q_\mu + r_\mu)$ pour perdre 1fr et les probabilités $1 - q_1 - r_1, \ldots$, $1 - q_\mu - r_\mu$ pour faire partie nulle.

Le joueur C a successivement les probabilités $r_1, r_2, \ldots, r_\mu$ pour gagner 2fr, $(p_1 + q_1)$, $(p_2 + q_2)$, ..., $(p_\mu + q_\mu)$ pour gagner 1fr et t_1, $t_2, \ldots, t_\mu$ pour faire partie nulle.

La probabilité pour que l'événement A′ se produise X fois et l'événement B′, Y fois en μ épreuves est la probabilité pour que le joueur A perde X francs et le joueur B, Y francs en μ parties.

Cette probabilité est donnée par la formule du n° 52. On a dans le cas actuel

$$\psi_1(\mu) = \Sigma(-p - r),$$

$$\psi_2(\mu) = \Sigma(-q - r),$$

$$\psi_3(\mu) = \Sigma(2r + p + q),$$

$$\varphi_1(\mu) = \Sigma 2(p + r)(1 - p - r),$$

$$\varphi_2(\mu) = \Sigma 2(q + r)(1 - q - r),$$

$$\varphi_3(\mu) = \Sigma 2[p + q + 4r - (2r + p + q)^2].$$

En désignant par K^2 la quantité

$$2\varphi_1(\mu)\varphi_2(\mu)+2\varphi_1(\mu)\varphi_3(\mu)+2\varphi_2(\mu)\varphi_3(\mu)-\varphi_1^2(\mu)-\varphi_2^2(\mu)-\varphi_3^2(\mu),$$

la probabilité cherchée a pour expression

$$\frac{1}{\pi K}\,e^{-\frac{8}{K^2}\left\{\Sigma(q+r)(1-q-r)[X-\Sigma(p+r)]^2+[\Sigma 2(pq-rt)][X-\Sigma(p+r)][Y-\Sigma(q+r)]+\Sigma(p+r)(1-p-r)[Y-\Sigma(q+r)]^2\right\}}\,dX\,dY.$$

63. La plus grande probabilité a lieu lorsque $X=\Sigma(p+r)$ et $Y=\Sigma(q+r)$. La valeur moyenne de X est $\Sigma(p+r)$, la valeur moyenne de Y est $\Sigma(q+r)$.

Les quantités $\Sigma(p+r)$ et $\Sigma(q+r)$ sont donc les valeurs normales des nombres des arrivées des événements.

Si le premier événement se produit $[\Sigma(p+r)]\pm x$ fois et le second $[\Sigma(q+r)]\pm y$ fois, on dit que les *écarts* sont x et y. La probabilité pour que les écarts soient $+x$ et $+y$ est

$$\frac{1}{\pi K}\,e^{-\frac{8}{K^2}\left\{\Sigma(q+r)(1-q-r)x^2+[\Sigma 2(pq-rt)]xy+\Sigma(p+r)(1-p-r)y^2\right\}}\,dx\,dy.$$

64. Lorsque les épreuves sont identiques, la formule se simplifie, la probabilité pour que les écarts soient x et y en μ épreuves est

$$\frac{2}{\pi\mu M}\,e^{-\frac{4}{\mu M^2}\left[2(q+r)(1-q-r)x^2+4(pq-rt)xy+2(p+r)(1-p-r)y^2\right]}\,dx\,dy,$$

M^2 désignant la quantité

$$16[(p+r)(q+r)(p+t)(q+t)-(pq-rt)^2].$$

La probabilité est susceptible d'être représentée géométriquement (n° 55); si l'on considère les ellipses isoprobables, l'aire de celles-ci croît proportionnellement à μ, les rayons homologues croissent proportionnellement à $\sqrt{\mu}$ et décroissent donc *relativement* à μ. C'est une généralisation du théorème de Bernoulli.

Probabilités du second genre.

65. *Le joueur* B *possède la somme* y *et les joueurs* A *et* C *une somme infinie ; quelle est la probabilité pour que, à la* $\mu^{\text{ième}}$ *partie exactement, le joueur* B *soit ruiné, le joueur* A *ayant perdu la somme* x ?

Désignons comme précédemment par $f(0, \mu, x, y)$ la probabilité pour que, à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, le joueur A perde la somme x et le joueur B la somme y et par $\chi(0, \mu, x, y)$ la probabilité cherchée. Nous allons écrire de deux façons différentes la probabilité $f(0, \mu, x, y)$.

Le joueur B ne peut perdre la somme y sans avoir perdu précédemment la somme y_1, si y_1 est inférieur à y. La probabilité pour que, à la $\mu_1^{\text{ième}}$ partie, le joueur A perde la somme x_1, la perte y_1 étant pour la première fois atteinte par le joueur B, est $\chi(0, \mu_1, x_1, y_1)$.

La probabilité pour que, à la $\mu_1^{\text{ième}}$ partie, le joueur A perde la somme x_1, la perte y_1 étant pour la première fois atteinte par le joueur B, et les pertes finales des deux joueurs étant x et y à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, est, en vertu du principe des probabilités composées, $\chi(0, \mu_1, x_1, y_1) \times f(\mu_1, \mu, x - x_1, y - y_1)$.

La perte y_1 pouvant être pour la première fois atteinte à toutes les parties de zéro à μ et, d'autre part, la perte x_1 pouvant avoir toute valeur de $-\infty$ à $+\infty$, la probabilité pour que, à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, le joueur A perde la somme x et le joueur B la somme y est, en vertu du principe des probabilités totales,

$$f(0, \mu, x, y) = \int_0^{\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(0, \mu_1, x_1, y_1) \times f(\mu_1, \mu, x - x_1, y - y_1)\, dx_1\, d\mu_1.$$

Telle est l'équation de condition à laquelle doit satisfaire la fonction χ.

66. Nous supposerons que le jeu soit symétrique, alors

$$f(\mu_1, \mu, x - x_1, y - y_1) = \frac{2e^{-\frac{4[(x-x_1)^2 - (x-x_1)(y-y_1) + (y-y_1)^2]}{3[\varphi(\mu) - \varphi(\mu_1)]}}}{\pi\sqrt{3}[\varphi(\mu) - \varphi(\mu_1)]}.$$

L'équation de condition est identiquement vérifiée en posant

$$\chi(o, \mu_1, x_1, y_1) = \frac{y\varphi'(\mu_1)}{\varphi(\mu_1)} f(o, \mu_1, x_1, y_1).$$

La vérification se fait de la façon suivante : on intègre le second membre par rapport à x_1, puis on pose

$$\lambda^2 = \frac{(y - y_1)^2}{\varphi(\mu)} \frac{\varphi(\mu_1)}{\varphi(\mu) - \varphi(\mu_1)},$$

et l'on est ramené à une intégrale de la forme connue (nº **50**).

La probabilité demandée est donc

$$\frac{2x\varphi'(\mu)e^{-\frac{4}{3\varphi(\mu)}(x^2+xy+y^2)}}{\pi\sqrt{3}[\varphi(\mu)]^2}.$$

67. *Les joueurs A et C possèdent une somme infinie et le joueur B possède la somme m; quelle est la probabilité pour que, à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, le joueur A ait perdu la somme x et le joueur B la somme y?*

Nous supposerons, comme dans le problème précédent, que le jeu est symétrique.

Par un raisonnement analogue à celui du nº **57**, et par des calculs trop longs pour être reproduits, on obtient pour expression de la probabilité cherchée

$$\frac{2e^{-\frac{4}{3\varphi(\mu)}(x^2+xy+y^2)} - 2e^{-\frac{4}{3\varphi(\mu)}(x^2+xy+y^2+3m^2-3my)}}{\pi\varphi(\mu)\sqrt{3}}.$$

Probabilités des genres supérieurs.

68. D'après notre classification, les probabilités sont dites des *genres supérieurs* quand les fortunes de plusieurs joueurs sont limitées. Dans ce cas, il semble difficile d'exprimer les probabilités de

ruine de ces joueurs. Quand ceux-ci sont au nombre de trois, on peut déterminer la durée moyenne du jeu.

Les joueurs A, B, C, *possédant les sommes a, b, c, jouent jusqu'à la ruine de l'un d'eux; quelle est la durée moyenne du jeu?*

Nous supposerons que le jeu soit symétrique et uniforme, caractérisé à chaque partie par la fonction d'instabilité φ_1.

Nous rappelons que la durée moyenne d'un jeu est l'espérance mathématique d'un joueur H qui toucherait 1fr par partie jouée.

Par des considérations qu'il serait trop long d'exposer, on est conduit au résultat suivant : Si l'on désigne par $\lambda(x, y)$ la durée moyenne quand le joueur A possède la somme x et le joueur B la somme y (et, par suite, le joueur C la somme $a+b+c-x-y$), la fonction λ doit vérifier l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \, \partial y} + \frac{4}{\varphi_1} = 0$$

et les conditions aux limites $\lambda(0, y) = 0$, $\lambda(x, 0) = 0$ et $\lambda = 0$ pour $x + y = a + b + c$.

Ces équations sont vérifiées par la solution

$$\lambda = \frac{4xy(a+b+c-x-y)}{(a+b+c)\varphi_1},$$

qui est d'ailleurs unique.

Puisque, au début du jeu, $x = a$ et $y = b$, la durée moyenne cherchée a pour valeur

$$\frac{4abc}{\varphi_1(a+b+c)}.$$

Si l'un des joueurs, le joueur C par exemple, a une fortune infinie, la durée moyenne du jeu est $\frac{4ab}{\varphi_1}$. Si deux des joueurs ont des fortunes infinies, la durée moyenne est infinie.

On peut traiter des problèmes analogues lorsqu'il y a discontinuité: on est alors conduit à des équations aux différences partielles qu'il est possible d'intégrer.

69. *Les joueurs A, B, C, dont les fortunes sont a, b, c, jouent jusqu'à ce que deux d'entre eux soient ruinés, quelle est la durée moyenne du jeu?*

Nous supposerons que les conditions du jeu soient les mêmes que précédemment et caractérisées par la fonction φ_1, puis, qu'après la ruine de l'un des joueurs, les deux autres jouent à un jeu équitable caractérisé par la fonction φ_2.

En désignant comme précédemment par $\lambda(x, y)$ la durée moyenne totale du jeu quand le joueur A possède la somme x, le joueur B la somme y et le joueur C la somme $s - x - y$, $(s = a + b + c)$, on a toujours

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} + \frac{4}{\varphi_1} = 0,$$

mais les conditions aux limites ne sont plus les mêmes.

Lorsque $x = 0$, le joueur A est ruiné, et, si le joueur B possède la somme y, le joueur C possède la somme $s - y$.

Ces deux joueurs devant jouer jusqu'à la ruine de l'un d'eux, la durée moyenne de ce nouveau jeu est (n° **49**)

$$\frac{2y(s-y)}{\varphi_2}.$$

Le même raisonnement s'applique au cas où l'un des joueurs B ou C serait ruiné le premier, les conditions aux limites sont donc

Pour $x = 0$.................... $\lambda = \dfrac{2y(s-y)}{\varphi_2}$,

Pour $y = 0$.................... $\lambda = \dfrac{2x(s-x)}{\varphi_2}$,

Pour $s - x - y = 0$............ $\lambda = \dfrac{2xy}{\varphi_2}$.

On reconnaît facilement que l'équation indéfinie et les conditions aux limites sont vérifiées si l'on pose

$$\lambda = \frac{4xy(s-x-y)}{\varphi_1 s}$$
$$+ \frac{2}{\varphi_2 s}\big[xy(x+y) + x(s-x-y)(s-y) + y(s-x-y)(s-x)\big].$$

Cette solution est d'ailleurs unique.

Au début du jeu, $x = a, y = b, s - x - y = c$, donc *la durée moyenne du jeu a pour expression*

$$\frac{4abc}{\varphi_1(a+b+c)} + \frac{2}{\varphi_2(a+b+c)}[ab(a+b)+ac(a+c)+bc(b+c)].$$

La première partie de la somme exprime la durée moyenne jusqu'à ce que l'un des joueurs soit ruiné; le second terme exprime la durée moyenne quand les deux autres joueurs jouent jusqu'à la ruine de l'un d'eux.

On obtient des résultats analogues en supposant le jeu discontinu, on est alors conduit à des équations aux différences finies partielles.

Il est regrettable que la place nous manque pour exposer le raisonnement qui a permis d'obtenir la dernière formule; ce raisonnement, dont l'exposition prendrait plusieurs pages, est, croyons-nous, un des plus curieux du calcul des probabilités.

Probabilités connexes.

70. Nous avons admis jusqu'à présent l'indépendance, c'est-à-dire que nous avons considéré les conditions relatives à une partie comme indépendantes des parties antérieures.

Nous allons étudier maintenant les probabilités connexes du premier genre à deux variables. Nous dirons qu'il y a connexité du premier genre quand les conditions à une partie dépendent uniquement de la perte actuelle des joueurs et du rang occupé par la partie considérée.

Nous supposerons que les fonctions d'instabilité φ_1, φ_2, φ_3 relatives aux trois joueurs sont constantes et que, pour chacun d'eux, l'espérance relative à une partie est égale au produit de sa perte actuelle par une quantité a qui peut être variable d'une partie à l'autre, mais qui, à chaque partie, est la même pour les trois joueurs.

Si, par exemple, à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, les joueurs ont perdu les sommes x, y, $-(x+y)$, leurs espérances pour la partie suivante sont ax, ay, $-a(x+y)$.

Le jeu considéré est, comme on voit, uniforme, relativement aux fonctions d'instabilité, mais non relativement aux espérances.

Le jeu étant ainsi défini, une analyse analogue à celle du n° **24**, mais plus laborieuse, conduit au résultat suivant :

La probabilité pour que, à la $\mu^{\text{ième}}$ partie, le joueur A ait perdu la somme x et le joueur B la somme y est

$$\frac{2}{\pi}\,\frac{e^{-2\frac{\varphi_2 x^2+(\varphi_1+\varphi_2-\varphi_3)xy+\varphi_1 y^2}{F(\mu)\sqrt{2\varphi_1\varphi_2+2\varphi_1\varphi_3+2\varphi_2\varphi_3-\varphi_1^2-\varphi_2^2-\varphi_3^2}}}}{F(\mu)}\,dx\,dy,$$

$F(\mu)$ étant l'intégrale de l'équation différentielle

$$\frac{\partial F}{\partial \mu}+2aF=\sqrt{2\varphi_1\varphi_2+2\varphi_1\varphi_3+2\varphi_2\varphi_3-\varphi_1^2-\varphi_2^2-\varphi_3^2}.$$

Si, en particulier, a est constant, on a

$$F=\frac{\sqrt{2\varphi_1\varphi_2+2\varphi_1\varphi_3+2\varphi_2\varphi_3-\varphi_1^2-\varphi_2^2-\varphi_3^2}}{2a}\left(1-e^{-2a\mu}\right).$$

Nous appliquerons ce résultat à la résolution approchée du problème suivant :

71. *D'une urne qui contient m boules blanches, n boules noires et k boules rouges, on extrait successivement μ boules sans les replacer dans l'urne. Quelle est la probabilité d'une composition donnée de l'urne?*

Si, en μ tirages, il sort $\frac{\mu m}{m+n+k}+x$ boules blanches, $\frac{\mu n}{m+n+k}+y$ boules noires, et $\frac{\mu k}{m+n+k}-x-y$ boules rouges, nous disons que les écarts sont x et y. La question posée consiste à chercher la probabilité pour que les écarts soient x et y en μ épreuves.

Supposons que trois joueurs A, B, C perdent respectivement des sommes égales aux écarts x, y, et $-(x+y)$. Supposons encore que μ tirages aient été effectués et que les écarts soient x et y.

Au tirage suivant, il y a probabilité

$$\frac{(s-\mu)\,m-sx}{s(s-\mu)}$$

(s désignant la somme $m+n+k$) pour qu'il sorte une blanche et par suite pour que l'écart x augmente de la quantité $\frac{s-m}{s}$. Il y a de même probabilité

$$\frac{(s-m)(s-\mu)+sx}{s(s-\mu)}$$

pour qu'il ne sorte pas une blanche et par suite pour que l'écart x diminue de la quantité $\frac{m}{s}$.

L'espérance mathématique du joueur A pour le tirage considéré est donc $\frac{x}{s-\mu}$. L'espérance mathématique du joueur B est de même $\frac{y}{s-\mu}$.

Les espérances mathématiques des joueurs A et B sont donc constamment proportionnelles à leur perte totale et la quantité précédemment désignée par a est $\frac{1}{s-\mu}$.

La fonction d'instabilité relative au joueur A a pour valeur

$$\varphi_1 = 2\left[\frac{m(s-\mu)(s-m)+xs^2(2s-m)}{s^2(s-\mu)} - \frac{x^2}{(s-\mu)^2}\right].$$

Si les probabilités de sortie des boules étaient constantes, les écarts x et y seraient de l'ordre de $\sqrt{\mu}$, et par suite ils seraient négligeables comparativement à μ. Il en est de même à plus forte raison dans le cas actuel, puisque les écarts ont une tendance à diminuer d'autant plus grande que ces écarts sont plus grands eux-mêmes; x et y sont donc négligeables comparativement à μ et par suite comparativement à m, n, k qui sont de grands nombres supposés du même ordre que μ.

La fonction d'instabilité relative au joueur A se réduit donc, en négligeant x, à la quantité

$$\varphi_1 = \frac{2m(s-m)}{s^2}.$$

Les fonctions φ_2 et φ_3 ont de même pour valeurs

$$\varphi_2 = \frac{2n(s-n)}{s^2}, \qquad \varphi_3 = \frac{2k(s-k)}{s^2}.$$

Les fonctions d'instabilité étant constantes et les espérances étant proportionnelles aux pertes actuelles, on peut appliquer au problème dont il s'agit la formule du n° **70**. La fonction $F(\mu)$ est l'intégrale de l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial \mu} + \frac{2F}{s-\mu} = 4\sqrt{\frac{mnk}{s^3}},$$

on a donc

$$F(\mu) = 4\sqrt{\frac{mnk}{s^3}}\,\frac{\mu(s-\mu)}{s}.$$

La probabilité pour que le joueur A perde la somme x et le joueur B la somme y, c'est-à-dire la probabilité pour que les écarts soient x et y, a pour expression

$$\frac{s^2\sqrt{s}\,e^{-\frac{[n(s-n)x^2+2mnxy+m(s-m)y^2]s}{2mnk\mu(s-\mu)}}}{2\pi\sqrt{mnk}\,\mu(s-\mu)}\,dx\,dy.$$

Si l'on désigne par p, q, r les quantités $\frac{m}{s}, \frac{n}{s}, \frac{k}{s}$, l'expression ci-dessus s'écrit

$$\frac{s\,e^{-\frac{1}{2\mu pqr}[q(1-q)x^2+2pqxy+p(1-p)y^2]\frac{s}{\mu(s-\mu)}}}{2\pi\mu\sqrt{pqr}\,(s-\mu)}\,dx\,dy.$$

En comparant ce résultat à celui qui a été obtenu au n° **61** et qui serait relatif au cas où l'on replacerait les boules dans l'urne après chaque tirage, on voit que les écarts sont diminués dans le rapport de $\sqrt{s-\mu}$ à $\sqrt{s}$.

72. Reprenons la question relative aux joueurs (n° **70**) : si l'on suppose que, μ_1 parties ayant été jouées, les joueurs A et B aient perdu les sommes x_1 et y_1, quelle est la probabilité pour que ces joueurs perdent en tout les sommes x et y après une nouvelle série de μ parties ?

Pour résoudre ce problème (pour lequel nous supposerons la quantité a constante, c'est-à-dire le jeu uniforme), nous écrirons de deux façons différentes la probabilité pour que les joueurs A et B aient perdu les sommes x et y en $\mu_1 + \mu$ parties.

Cette probabilité a pour valeur

$$f(\mu_1+\mu, 0, 0, x, y) = \frac{4ae^{-8a\frac{\varphi_2 x^2 + (\varphi_1+\varphi_2-\varphi_3)xy + \varphi_1 y^2}{(2\varphi_1\varphi_2+2\varphi_1\varphi_3+2\varphi_2\varphi_3-\varphi_1^2-\varphi_2^2-\varphi_3^2)(1-e^{-2a(\mu_1+\mu)})}}}{\pi\sqrt{2\varphi_1\varphi_2+2\varphi_1\varphi_3+2\varphi_2\varphi_3-\varphi_1^2-\varphi_2^2-\varphi_3^2}\,(1-e^{-2a(\mu_1+\mu)})}.$$

Soit $f(\mu, x_1, y_1, x, y)$ la probabilité cherchée; la probabilité pour que, en μ_1 parties, les pertes soient x_1 et y_1 et pour qu'elles deviennent ensuite x et y après les μ parties suivantes est, en vertu du principe des probabilités composées,

$$\frac{4ae^{-8a\frac{\varphi_2 x_1^2 + (\varphi_1+\varphi_2-\varphi_3)x_1y_1 + \varphi_1 y_1^2}{(2\varphi_1\varphi_2+2\varphi_1\varphi_3+2\varphi_2\varphi_3-\varphi_1^2-\varphi_2^2-\varphi_3^2)(1-e^{-2a\mu_1})}}}{\pi\sqrt{2\varphi_1\varphi_2+2\varphi_1\varphi_3+2\varphi_2\varphi_3-\varphi_1^2-\varphi_2^2-\varphi_3^2}\,(1-e^{-2a\mu_1})} \times f(\mu, x_1, y_1, x, y).$$

En intégrant cette expression pour toutes les valeurs de x_1, y_1, on obtient, d'après le principe de la probabilité totale, la probabilité pour que les pertes soient x et y en $\mu_1+\mu$ parties; on doit donc avoir

$$f(\mu_1+\mu, 0, 0, x, y)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4ae^{-8a\frac{\varphi_2 x_1^2 + (\varphi_1+\varphi_2-\varphi_3)x_1y_1 + \varphi_1 y_1^2}{(2\varphi_1\varphi_2+2\varphi_1\varphi_3+2\varphi_2\varphi_3-\varphi_1^2-\varphi_2^2-\varphi_3^2)(1-e^{-2a\mu_1})}}}{\pi\sqrt{2\varphi_1\varphi_2+2\varphi_1\varphi_3+2\varphi_2\varphi_3-\varphi_1^2-\varphi_2^2-\varphi_3^2}\,(1-e^{-2a\mu_1})}$$

$$\times f(\mu, x_1, y_1, x, y)\,dx_1\,dy_1.$$

Telle est l'équation de condition à laquelle doit satisfaire la fonction f.

Cette équation est satisfaite si l'on pose

$$f(\mu, x_1, y_1, x, y)$$

$$= \frac{4ae^{-8a\frac{\varphi_2(x-x_1e^{-a\mu})^2 + (\varphi_1+\varphi_2-\varphi_3)(x-x_1e^{-a\mu})(y-y_1e^{-a\mu}) + \varphi_1(y-y_1e^{-a\mu})^2}{(2\varphi_1\varphi_2+2\varphi_1\varphi_3+2\varphi_2\varphi_3-\varphi_1^2-\varphi_2^2-\varphi_3^2)(1-e^{-2a\mu})}}}{\pi\sqrt{2\varphi_1\varphi_2+2\varphi_1\varphi_3+2\varphi_2\varphi_3-\varphi_1^2-\varphi_2^2-\varphi_3^2}\,(1-e^{-2a\mu})}.$$

Telle est l'expression de la probabilité cherchée.

75. *L'urne A contient m boules blanches, n boules noires et k boules rouges; l'urne B contient m' boules blanches, n' boules noires et k' boules rouges. A chaque épreuve, on tire une boule de A que l'on place dans B, en même temps qu'on tire une boule*

de B que l'on place dans A. Quelle est la probabilité pour que, après μ épreuves, les urnes aient une composition donnée?

Désignons par s la somme $m+n+k+m'+n'+k'$ de toutes les boules; nous disons que les écarts sont x et y quand il y a

$$\frac{(m+m')(m+n+k)}{s}+x$$

boules blanches dans l'urne A et

$$\frac{(n+n')(m+n+k)}{s}+y$$

boules noires dans l'urne A.

La question peut s'énoncer ainsi : les écarts ayant initialement les valeurs données x_1, y_1, quelle est la probabilité pour que leurs valeurs soient x et y après μ épreuves.

Si les écarts sont x et y, il y a

$$\frac{(k+k')(m+n+k)}{s}-x-y$$

boules rouges dans l'urne A; de même dans l'urne B, les nombres des boules blanches, noires et rouges sont respectivement

$$\frac{(m+m')(m'+n'+k')}{s}-x, \qquad \frac{(n+n')(m'+n'+k')}{s}-y,$$
$$\frac{(k+k')(m'+n'+k')}{s}+x+y.$$

Supposons que trois joueurs H, K, L perdent respectivement des sommes égales aux écarts x, y, $-(x+y)$ et supposons que les écarts soient x et y.

Au prochain tirage, il y a probabilité

$$\frac{(m+m')(m+n+k)+xs}{s^2(m+n+k)(m'+n'+k')}\left[(n+n'+k+k')(m'+n'+k')+xs\right]$$

pour que l'écart x diminue de un. Il y a de même probabilité

$$\frac{(m+m')(m'+n'+k')-xs}{s^2(m+n+k)(m'+n'+k')}\left[(n+n'+k+k')(m+n+k)-xs\right]$$

pour que l'écart x augmente de un.

L'espérance mathématique du joueur H pour le prochain tirage est donc

$$\frac{sx}{(m+n+k)(m'+n'+k')}.$$

Celle du joueur K est de même

$$\frac{sy}{(m+n+k)(m'+n'+k')}.$$

Ces espérances sont proportionnelles à x et à y et la quantité précédemment désignée par a a pour valeur

$$a=\frac{s}{(m+n+k)(m'+n'+k')}.$$

Nous supposerons que m, n, k, m', n', k' sont de très grands nombres auprès desquels les écarts initiaux

$$x_1=\frac{mn'-m'n+mk'-m'k}{s}$$

et

$$y_1=\frac{nk'-n'k+nm'-n'm}{s}$$

sont négligeables. Les écarts x et y seraient de l'ordre de $\sqrt{\mu}$ (que nous supposons de l'ordre de $\sqrt{m}$, $\sqrt{n}$, ...) si aucune cause retardatrice ne tendait à en diminuer l'amplitude; ils seraient donc négligeables comparativement à m, n, ... Dans le cas actuel, ces écarts sont à plus forte raison négligeables comparativement à m, n, ... et, en les négligeant dans l'expression de la fonction d'instabilité relative au joueur H, celle-ci a pour valeur

$$\varphi_1=\frac{4(m+m')(n+n'+k+k')}{s^2},$$

on a de même

$$\varphi_2 = \frac{4(n+n')(k+k'+m+m')}{s^2} \quad \text{et} \quad \varphi_3 = \frac{4(k+k')(m+m'+n+n')}{s^2}.$$

Les espérances mathématiques des joueurs étant constamment proportionnelles à leurs pertes et les fonctions d'instabilité étant constantes, la probabilité pour que les joueurs H et K perdent finalement les sommes x et y ou, en d'autres termes, la probabilité pour que les écarts ayant initialement les valeurs x_1 et y_1 prennent les valeurs x et y après μ épreuves est donnée par la dernière formule du n° **72** dans laquelle on doit remplacer les quantités x_1, y_1, a, φ_1, φ_2, φ_3 par les valeurs que nous venons d'obtenir.

74. Dans certains cas, il est possible d'obtenir l'expression des probabilités, quoique les espérances relatives à chacun des joueurs ne soient pas proportionnelles à leurs pertes actuelles.

Nous supposerons que pour les trois joueurs A, B, C la fonction d'instabilité ait une valeur constante φ_1 et que, ces joueurs ayant perdu les sommes x, y, $-(x+y)$, leurs espérances pour la partie suivante soient respectivement $2ax+ay$, $ay-ax$ et $-ax-2ay$; a étant une constante.

Dans ces conditions, une analyse analogue à celle du n° **18** conduit au résultat suivant :

La probabilité pour que, après μ parties, le joueur A ait perdu la somme x et le joueur B la somme y est exprimée par la formule

$$\frac{2\sqrt{3}\,a\,e^{-\frac{4a(x^2+xy+y^2)}{\varphi_1(1-e^{-3a\mu})}}}{\pi\varphi_1(1-e^{-3a\mu})}\,dx\,dy.$$

75. *Trois urnes* A, B, C *contiennent chacune* m *boules blanches et* m *boules noires; chaque épreuve consiste à tirer une boule de* A *pour la placer dans* B, *en même temps qu'à tirer une boule de* B *pour la placer dans* C, *en même temps qu'à tirer une boule de* C *pour la placer dans* A. *Quelle est la probabilité d'une composition donnée des urnes après* μ *épreuves?*

Nous dirons que les écarts sont x et y s'il y a $m+x$ boules blanches dans l'urne A et $m+y$ boules blanches dans l'urne B.

Si les écarts sont x et y, il y a $m-x$ boules noires dans l'urne A, $m-y$ boules noires dans l'urne B, $m-x-y$ boules blanches dans l'urne C, et $m+x+y$ boules noires dans l'urne C.

Supposons que trois joueurs H, K, L perdent des sommes respectivement égales aux écarts, et supposons que ces écarts soient x, y et $-(x+y)$.

A la prochaine épreuve, il y a probabilité

$$\frac{m-x}{2m}\,\frac{m-x-y}{2m}$$

pour que x augmente de un, et probabilité

$$\frac{m+x}{2m}\,\frac{m+x+y}{2m}$$

pour que x diminue de un.

L'espérance mathématique du joueur H est donc, pour l'épreuve considérée, $\frac{2x+y}{2m}$.

A cette même épreuve, il y a probabilité

$$\frac{m-y}{2m}\,\frac{m+x}{2m}$$

pour que y augmente de un, et probabilité

$$\frac{m+y}{2m}\,\frac{m-x}{2m}$$

pour que y diminue de un; l'espérance mathématique du joueur K est donc $\frac{y-x}{2m}$.

La fonction d'instabilité relative au joueur H est, pour l'épreuve considérée,

$$\frac{2m^2-2x^2-2xy-y^2}{2m^2}.$$

Nous supposerons que m est un grand nombre et que μ est égale-

ment un grand nombre du même ordre. S'il n'existait aucune cause retardatrice des écarts, ceux-ci seraient de l'ordre de $\sqrt{\mu}$ et, par suite, ils seraient négligeables comparativement à μ ou à m, et, à plus forte raison, leurs carrés ou produits seraient négligeables comparativement à μ^2 ou m^2.

Puisque, dans le cas actuel, il existe une cause retardatrice des écarts, on peut, à plus forte raison, négliger x^2, xy et y^2 comparativement à m^2.

La fonction d'instabilité φ_1 relative au joueur H se réduit donc à un. Il en est de même des fonctions d'instabilité φ_2, φ_3 relatives aux joueurs K et L.

Le problème actuel rentre dans le cas traité au n° **74**, car les trois fonctions d'instabilité sont égales et constantes, et les espérances mathématiques suivent la loi exigée. La probabilité pour que le joueur H perde la somme x et le joueur K la somme y, c'est-à-dire la probabilité pour que les écarts soient x et y en μ épreuves, est

$$\frac{\sqrt{3}\, e^{-\frac{2(x^2+xy+y^2)}{m\left(1-e^{-\frac{3\mu}{m}}\right)}}}{m\pi\left(1-e^{-\frac{3\mu}{m}}\right)}\,dx\,dy.$$

Cas où le nombre des variables est quelconque.

76. *Les joueurs* $A_1, A_2, \ldots, A_n$, *qui possèdent chacun une fortune infinie, doivent jouer* μ *parties; quelle est la probabilité pour que le joueur* A_1 *perde la somme* x_1, *le joueur* A_2 *la somme* $x_2, \ldots,$ *le joueur* A_{n-1} *la somme* x_{n-1}?

Nous supposerons seulement que les conditions du jeu pour une partie sont indépendantes des résultats antérieurs du jeu; nous supposons l'indépendance, mais non l'uniformité.

Par une analyse qu'il serait trop long de développer, on démontre que l'expression de la probabilité cherchée est

$$f\,dx_1\,dx_2\ldots dx_{n-1} = \mathrm{C}\,e^{-\left\{\sum a_i\,[x_i+\psi_i(\mu)]^2+\sum b_{ij}\,[x_i+\psi_i(\mu)]\,[x_j+\psi_j(\mu)]\right\}}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_{n-1}.$$

$\psi_1(\mu), \ldots, \psi_i(\mu), \ldots, \psi_{n-1}(\mu)$ sont les espérances totales des dif-

férents joueurs pour les μ parties. C, $a_1, \ldots, a_i, \ldots, b_{1,1}, \ldots, b_{i,j}, \ldots$, dépendent de μ.

Les quantités $\psi_1(\mu)$, $\psi_2(\mu)$, ... se déduisent immédiatement des conditions du jeu par suite de leur propriété d'addition.

Il s'agit de déterminer les fonctions C, $a_1, \ldots, b_{1,1}, \ldots$. On obtient une première équation en exprimant que la somme des probabilités est un :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} f\,dx_1\,dx_2\ldots dx_{n-1} = 1,$$

l'intégration du premier membre s'effectue en termes finis. La considération des fonctions d'instabilité relatives aux différents joueurs fournit $n-1$ autres équations ; les fonctions d'instabilité $\varphi_1(\mu)$, $\varphi_2(\mu)$, ..., $\varphi_{n-1}(\mu)$ se déduisent immédiatement des conditions du jeu, grâce à leur propriété d'addition ; or, on a

$$\varphi_i(\mu) = 2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} x_i^2 f\,dx_1\,dx_2\ldots dx_{n-1} - 2[\psi_i(\mu)]^2.$$

L'intégrale s'obtient en termes finis ; chacune des fonctions φ fournit donc une équation de nature à déterminer les fonctions cherchées.

On obtient les $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ autres équations nécessaires par la considération des valeurs moyennes des produits des variables deux à deux. On a, par exemple, en désignant par VM la valeur moyenne,

$$\mathrm{VM}\,x_1x_2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} x_1x_2 f\,dx_1\,dx_2\ldots dx_{n-1}.$$

L'intégrale s'obtient en termes finis, et cette relation fournit une équation de nature à déterminer les fonctions cherchées quand on connaît $\mathrm{VM}\,x_1x_2$.

Il faut donc obtenir $\mathrm{VM}\,x_1x_2$ d'après les conditions du jeu. Nous allons démontrer que la quantité $\mathrm{VM}\,x_1x_2 - \psi_1(\mu)\psi_2(\mu)$ jouit de la propriété d'addition, c'est-à-dire que sa valeur pour μ parties est égale à la somme des valeurs des quantités analogues pour chacune des parties considérée isolément.

Supposons que les joueurs $A_3, A_4, \ldots, A_n$, tout en continuant à

jouer séparément, associent leurs gains et leurs pertes : cela ne change rien aux jeux de A_1 et A_2, mais on peut alors considérer le jeu comme composé de trois joueurs : les joueurs A_1 et A_2, et l'association des autres.

Soit z la perte de l'association; on a évidemment

$$x_1 + x_2 + z = 0,$$

d'où

$$z^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$$

et, par suite,

$$\mathrm{VM}x_1x_2 = \frac{1}{2}(\mathrm{VM}z^2 - \mathrm{VM}x_1^2 - \mathrm{VM}x_2^2).$$

Désignons par $\Phi(\mu)$ et $\Psi(\mu)$ la fonction d'instabilité et l'espérance totale relatives à l'association; de l'égalité

$$\Phi(\mu) = 2[\mathrm{VM}z^2 - (\mathrm{VM}z)^2] = 2[\mathrm{VM}z^2 - \Psi^2(\mu)]$$

on déduit

$$\mathrm{VM}z^2 = \frac{\Phi(\mu)}{2} + \Psi^2(\mu);$$

on a de même

$$\mathrm{VM}x_1^2 = \frac{\varphi_1(\mu)}{2} + \psi_1^2(\mu), \qquad \mathrm{VM}x_2^2 = \frac{\varphi_2(\mu)}{2} + \psi_2^2(\mu)$$

et, par conséquent,

$$\mathrm{VM}x_1x_2 = \frac{\Phi(\mu) - \varphi_1(\mu) - \varphi_2(\mu)}{4} + \frac{\Psi^2(\mu) - \psi_1^2(\mu) - \psi_2^2(\mu)}{2}.$$

La somme des espérances est nulle (n° **35**); on a donc

$$\Psi(\mu) + \psi_1(\mu) + \psi_2(\mu) = 0,$$

et l'on peut écrire

$$\mathrm{VM}x_1x_2 = \frac{\Phi(\mu) - \varphi_1(\mu) - \varphi_2(\mu)}{4} + \psi_1(\mu)\psi_2(\mu),$$

d'où

$$\mathrm{VM}x_1x_2 - \psi_1(\mu)\psi_2(\mu) = \frac{\Phi(\mu) - \varphi_1(\mu) - \varphi_2(\mu)}{4}.$$

Le second membre, somme de trois fonctions d'instabilité, possède la propriété d'addition; il en est de même du premier. La quantité $\text{VM}x_1 x_2 - \psi_1(\mu)\psi_2(\mu)$ jouit donc de la propriété d'addition comme la quantité $\text{VM}x_1^2 - \psi_1^2(\mu)$, on l'obtient sans difficulté d'après les conditions du jeu.

77. Lorsque le jeu est uniforme, l'expression de la probabilité est

$$f = \frac{C}{(\mu)^{\frac{n-1}{2}}} e^{-\frac{1}{\mu}[\Sigma a_i (x_i + \mu\psi_i)^2 + \Sigma b_{i,j}(x_i + \mu\psi_i)(x_j + \mu\psi_j)]} dx_1\, dy_2 \ldots dx_{n-1}.$$

Les quantités C, $a_1, \ldots, a_i, \ldots, b_{1,1}, \ldots, b_{i.j}, \ldots$ sont de simples coefficients indépendants de μ.

78. Lorsque le jeu non uniforme est symétrique (c'est-à-dire identique pour tous les joueurs) et caractérisé par la fonction d'instabilité $\varphi(\mu)$, la probabilité est

$$\frac{\sqrt{n}\, e^{-\frac{2(n-1)}{n\varphi(\mu)}[\Sigma x_i^2 + \Sigma x_i x_j]}}{\left(\sqrt{\frac{\pi n \varphi(\mu)}{n-1}}\right)^{n-1}} dx_1\, dx_2 \ldots dx_{n-1}.$$

79. A chaque épreuve, n événements de probabilités $p_1, p_2, \ldots, p_n$ peuvent se produire et s'excluent mutuellement, de sorte que $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$.

Si, en μ épreuves, le premier événement s'est produit $\mu p_1 + x_1$ fois, le second $\mu p_2 + x_2$ fois, ..., le $\mu^{\text{ième}}$ $\mu p_n + x_n$ fois $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0)$, on dit que les écarts sont $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

La probabilité pour que les écarts soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en μ épreuves est

$$\frac{e^{-\frac{1}{2\mu}\left(\frac{x_1^2}{p_1} + \frac{x_2^2}{p_2} + \ldots + \frac{x_{n-1}^2}{p_{n-1}} + \frac{x_n^2}{p_n}\right)}}{(\sqrt{2\pi\mu})^{n-1}\sqrt{p_1 p_2 \ldots p_n}}.$$

Cette formule ne contient en réalité que $n-1$ variables, puisque $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$; on peut éliminer la variable que l'on veut. Quant à l'infiniment petit qui doit multiplier la quantité ci-dessus, on

l'obtient en supprimant du produit $dx_1\,dx_2\ldots dx_{n-1}\,dx_n$ l'élément qui correspond à la variable éliminée.

80. Une urne contient un très grand nombre a de boules de n couleurs différentes, k_1 sont blanches, k_2 sont noires, ..., k_n sont vertes. On tire un grand nombre μ de boules, soit ensemble, soit successivement, sans replacer dans l'urne les boules sorties.

On dit que les écarts sont x_1, x_2, ..., x_n s'il sort de l'urne $\mu\frac{k_1}{a}+x_1=\mu p_1+x_1$ boules blanches, $\mu\frac{k_2}{a}+x_2=\mu p_2+x_2$ boules noires, ..., $\mu\frac{k_n}{a}+x_n=\mu p_n+x_n$ boules vertes. (On a évidemment $p_1+p_2+\ldots+p_n=1$ et $x_1, x_2, \ldots, x_n=0$).

La probabilité pour que les écarts soient x_1, x_2, ..., x_n est

$$\frac{e^{-\frac{1}{2\mu}\frac{1}{\frac{a-\mu}{a}}\left[\frac{x_1^2}{p_1}+\frac{x_2^2}{p_2}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{p_{n-1}}+\frac{x_n^2}{p_n}\right]}}{\left(\sqrt{2\pi\mu\frac{a-\mu}{a}}\right)^{n-1}\sqrt{p_1p_2\ldots p_n}}.$$

Cette formule ne contient, en réalité, que $n-1$ variables, puisque $x_1+x_2+\ldots+x_n=0$; on peut éliminer la variable que l'on veut. Quant à l'infiniment petit qui doit multiplier la quantité ci-dessus, on l'obtient en supprimant du produit $dx_1\,dx_2\ldots dx_{n-1}\,dx_n$ l'élément qui correspond à la variable éliminée.

Le calcul des probabilités discontinues permet d'établir certaines identités curieuses entre quantités finies; le calcul des probabilités continues permet de même d'obtenir certaines relations curieuses entre intégrales. Ce calcul conduit aussi à la résolution par analogie de certains problèmes de Physique mathématique, notamment du problème du refroidissement d'un courant liquide et du problème plus simple du refroidissement d'une barre dont les extrémités sont maintenues à une température constante.

Je ne m'occuperai pas ici de ces questions et je remettrai également à plus tard l'exposition de mes études sur les probabilités discontinues et sur les probabilités des causes.

Remarquons, pour terminer, que si la présente étude change le

niveau de nos connaissances sur la théorie des épreuves répétées, c'est grâce à la conception des probabilités continues et à la réduction de toute question à un problème relatif au jeu. Remarquons aussi que la théorie mathématique de la spéculation et la théorie des erreurs d'observation peuvent être considérées comme des cas particuliers de la théorie mathématique du jeu.

Cette théorie, dont le but primitif peut sembler si éloigné de tout idéal, domine en réalité tout le calcul des probabilités; elle en est l'expression la plus générale et, par suite, la plus intéressante au point de vue scientifique.

Sur les fonctions abéliennes singulières d'invariants HUIT, DOUZE *et* CINQ;

PAR M. G. HUMBERT.

---

1. J'ai donné autrefois les *équations modulaires* pour les fonctions abéliennes singulières de deux variables, dont les invariants sont respectivement huit, douze et cinq : dans le présent travail, je voudrais introduire, au lieu des *modules* ordinaires de Richelot, les valeurs des dix thêtas normaux du premier ordre, d'arguments nuls. On arriverait évidemment au but en remplaçant les modules, dans les équations modulaires, par leurs valeurs en fonction des dix thêtas, mais les relations ainsi obtenues seraient décomposables en facteurs difficiles à mettre en évidence : c'est donc par d'autres méthodes que nous formerons les équations cherchées.

Elles conduisent, comme les relations classiques entre les thêtas elliptiques, à des conséquences arithmétiques : pour les invariants huit ou douze ces conséquences, à peu près évidentes *a priori*, concernent les décompositions des nombres du corps quadratique $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{3}$ en sommes de carrés de deux nombres appartenant au même corps; pour l'invariant cinq, j'arrive à des propositions, un peu plus cachées peut-être, sur les décompositions en sommes de trois carrés des nombres du type $M + \frac{1}{2}N(1+\sqrt{5})$, où M et N sont des entiers ordinaires.

Enfin, dans le cas de l'invariant douze, je comble une lacune de mes travaux précédents. Si l'on part de périodes vérifiant la relation $g = 3g'$, la transformation singulière de degré un, dont toutes les autres sont des puissances, change les fonctions abéliennes initiales en des fonctions *de modules différents*, et *douze* est le plus petit invariant donnant lieu à ce fait remarquable. Le problème se posait, dès lors, d'exprimer les modules nouveaux en fonction des anciens, ou, ce qui est identique, de traiter le même problème pour les dix thêtas d'arguments nuls : c'est la question qu'on trouvera résolue ici, et par des formules très simples.

Cas de l'invariant HUIT.

2. Les paires de périodes d'un système de fonctions abéliennes étant 1, 0; 0, 1; g, h; h, g', nous emploierons, pour les thêtas du premier ordre, les notations de Weierstrass : comme il ne s'agira, jusqu'à nouvel avis, que des valeurs de ces thêtas pour les arguments nuls, nous écrirons $\mathfrak{S}_5(g, h, g')$, ou $\mathfrak{S}_5$ pour la valeur de $\mathfrak{S}_5(u, v)$ au point $u = v = 0$.

Cherchons maintenant les relations qui lient les dix thêtas pairs lorsqu'on a, entre les périodes, la condition $g' = 2g$, à laquelle peut se ramener toute équation singulière d'invariant *huit*.

Soit posé

$$\Theta_5 = \mathfrak{S}_5(2g, 2h, 2g');$$

on a, d'une manière générale [1],

$$(1) \qquad 4\Theta_5^2 = \mathfrak{S}_5^2 + \mathfrak{S}_{12}^2 + \mathfrak{S}_{34}^2 + \mathfrak{S}_0^2.$$

Or, si $g' = 2g$, on peut écrire, par définition,

$$(2) \qquad \Theta_5 = \sum e^{\pi i(2gm^2+4hmn+4gn^2)},$$

la somme portant sur les valeurs entières de m, n, de $-\infty$ à $+\infty$; de

---

[1] KRAUSE, *Transformation des fonctions hyperelliptiques* (Teubner, 1886), p. 160.

même

$$\mathfrak{S}_5 = \sum e^{\pi i (gm^2 + 2hmn + 2gn^2)},$$

$$\mathfrak{S}_{12} = \sum e^{\pi i (gm^2 + 2hmn + 2gn^2) + \pi i m}.$$

Dans la somme $\mathfrak{S}_5 + \mathfrak{S}_{12}$, les termes qui correspondent aux mêmes valeurs de m et de n se détruisent si m est impair, et s'ajoutent si m est pair; on a donc

$$\mathfrak{S}_5 + \mathfrak{S}_{12} = 2 \sum e^{\pi i (4g\mu^2 + 4h\mu n + 2gn^2)},$$

c'est-à-dire, par comparaison avec (2),

$$\mathfrak{S}_5 + \mathfrak{S}_{12} = 2\Theta_5.$$

En remplaçant $2\Theta_5$ par cette valeur dans (1), on trouve

$$\mathfrak{S}_{34}^2 + \mathfrak{S}_0^2 = 2\mathfrak{S}_5 \mathfrak{S}_{12}.$$

On obtient, d'une manière analogue, cinq autres relations du même type entre les dix thêtas; voici le Tableau complet de ces six équations:

$$(3)\ \begin{cases} \mathfrak{S}_{34}^2 + \mathfrak{S}_0^2 = 2\mathfrak{S}_5 \mathfrak{S}_{12}, & \mathfrak{S}_{01}^2 + \mathfrak{S}_{23}^2 = 2\mathfrak{S}_5\ \mathfrak{S}_4, & \mathfrak{S}_2^2 + \mathfrak{S}_{14}^2 = 2\mathfrak{S}_4 \mathfrak{S}_{12}, \\ \mathfrak{S}_{34}^2 - \mathfrak{S}_0^2 = 2\mathfrak{S}_4 \mathfrak{S}_{03}, & \mathfrak{S}_{01}^2 - \mathfrak{S}_{23}^2 = 2\mathfrak{S}_{12} \mathfrak{S}_{03}, & \mathfrak{S}_2^2 - \mathfrak{S}_{14}^2 = 2\mathfrak{S}_5 \mathfrak{S}_{03}. \end{cases}$$

Enfin, si l'on tire de ces relations les quantités $\mathfrak{S}_{34}^2$, $\mathfrak{S}_2^2$, $\mathfrak{S}_{23}^2$, $\mathfrak{S}_{01}^2$, en fonction des seconds membres, et si l'on porte leurs valeurs dans l'équation $\mathfrak{S}_4^2 \mathfrak{S}_{23}^2 + \mathfrak{S}_2^2 \mathfrak{S}_{34}^2 = \mathfrak{S}_5^2 \mathfrak{S}_{01}^2$, qui est une des équations biquadratiques générales entre les thêtas d'arguments nuls, on obtient, après suppression du facteur $\mathfrak{S}_4 \mathfrak{S}_5$, évidemment différent de zéro, la relation nouvelle

$$(4)\qquad \mathfrak{S}_5^2 = \mathfrak{S}_4^2 + \mathfrak{S}_{12}^2 + \mathfrak{S}_{03}^2.$$

On constate ensuite aisément que les équations biquadratiques ordinaires entre les dix thêtas sont, dans le cas de $g' = 2g$, des conséquences de (3) et de (4); on verrait également qu'une seule des relations (3) et (4), jointe aux équations biquadratiques ordinaires, entraîne les autres conditions (3) et (4); on déduirait, enfin, de tout

cela la relation entre les *modules* qui caractérise les fonctions abéliennes singulières d'invariant *huit*.

3. *Corollaire I.* — Posons

$$(5) \qquad x = \frac{\vartheta_4(g, h, 2g)}{\vartheta_5(g, h, 2g)}, \qquad y = \frac{\vartheta_{12}}{\vartheta_5}, \qquad z = \frac{\vartheta_{03}}{\vartheta_5};$$

on a, par (4), $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, et, par (3),

$$(6) \quad \begin{cases} \sqrt{xy + z} = \dfrac{\vartheta_2}{\vartheta_5}, & \sqrt{yz + x} = \dfrac{\vartheta_{01}}{\vartheta_5}, & \sqrt{xz + y} = \dfrac{\vartheta_{34}}{\vartheta_5}, \\ \sqrt{xy - z} = \dfrac{\vartheta_{14}}{\vartheta_5}, & \sqrt{yz - x} = i\dfrac{\vartheta_{23}}{\vartheta_5}, & \sqrt{xz - y} = i\dfrac{\vartheta_0}{\vartheta_5}, \end{cases}$$

d'où cette conclusion : étant donnée la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, on peut exprimer en fonction uniforme (hyperabélienne) de deux variables g et h, les coordonnées x, y, z d'un point quelconque de la surface, ainsi que les six radicaux $\sqrt{xy \pm z}$, $\sqrt{yz \pm x}$, $\sqrt{xz \pm y}$, et cela par les équations (5) et (6).

4. *Corollaire II.* — En remplaçant dans (3) et (4) les thêtas par leurs développements en séries d'exponentielles et faisant $g' = 2g$, on arriverait aisément, par des procédés qui seront appliqués plus tard au cas de l'invariant cinq, à des conséquences arithmétiques. Par exemple, l'équation (4) conduit à ce théorème : si M et N sont deux entiers quelconques, le nombre des décompositions de

$$4(2M + 1 + 2N\sqrt{2})$$

en deux carrés selon la formule

$$(7) \qquad (2m_1 + 2n_1\sqrt{2})^2 + (2m_2 + 2n_2\sqrt{2})^2,$$

(où les m_i, n_i sont entiers) est égal au nombre des décompositions de la même quantité en deux carrés selon la formule

$$(8) \qquad [2\mu_1 + (2\nu_1 + 1)\sqrt{2}]^2 + [2\mu_2 + (2\nu_2 + 1)\sqrt{2}]^2.$$

Mais cette proposition se démontre directement sans difficulté ; car, à une décomposition (8) correspond une décomposition (7), et inversement, par les formules

$$m_1 = \nu_1 + \nu_2 + 1, \quad n_1 = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}, \quad m_2 = \nu_1 - \nu_2, \quad n_2 = \frac{\mu_1 - \mu_2}{2}.$$

Les équations (3) ne donneraient de même que des conclusions à peu près évidentes *a priori*.

Cas de l'invariant DOUZE.

5. Nous supposerons que la relation singulière entre les périodes est $g = 3g'$; une méthode analogue à la précédente, et basée sur les formules de la transformation ordinaire du troisième ordre, conduit, sans grandes difficultés [1], aux relations quadratiques suivantes entre les dix thêtas :

$$(1) \qquad \vartheta_5^2 + \vartheta_{23}^2 + \vartheta_{14}^2 - \vartheta_0^2 = 2\vartheta_4\,\vartheta_{01},$$

$$(2) \qquad \vartheta_5^2 - \vartheta_{23}^2 - \vartheta_{14}^2 - \vartheta_0^2 = 2\vartheta_2\,\vartheta_{03},$$

$$(3) \qquad \vartheta_5^2 - \vartheta_{23}^2 + \vartheta_{14}^2 + \vartheta_0^2 = 2\vartheta_{12}\vartheta_{34},$$

qu'il est aisé de vérifier *a posteriori*.

Considérons, par exemple, l'équation (1), et remplaçons-y les ϑ par leurs développements en séries : pour simplifier, nous poserons, dans ces développements,

$$h = \frac{1}{2}(\xi + \eta), \qquad g' = \frac{1}{2\sqrt{3}}(\xi - \eta), \qquad g = 3g' = \frac{3}{2\sqrt{3}}(\xi - \eta);$$

---

[1] La méthode la plus simple consiste à observer que, si $g = 3g'$, les fonctions abéliennes proposées admettent une transformation du troisième ordre en elles-mêmes (ce *Journal*, 5e série, t. VI, p. 334, n° 194) qui change respectivement, à un même facteur près, $\vartheta_5, \vartheta_{23}, \vartheta_{14}, \vartheta_0$; $\vartheta_4, \vartheta_{01}$; $\vartheta_2, \vartheta_{03}$; $\vartheta_{12}, \vartheta_{34}$ en $\vartheta_5, \vartheta_{23}, \vartheta_{14}, \vartheta_0$; $\vartheta_{01}, \vartheta_4$; $\vartheta_{03}, \vartheta_2$; $\vartheta_{34}, \vartheta_{12}$; dès lors, les relations classiques entre les thêtas initiaux et les thêtas transformés donnent de suite les équations (1), (2) et (3) : on prendra, par exemple, les relations indiquées par M. Krause [*loc. cit.*, p. 193, équations (1)].

il vient ainsi :

$$\mathfrak{S}_5 = \sum e^{\frac{\pi i}{2\sqrt{3}}\left[\xi(n+m\sqrt{3})^2-\eta(n-m\sqrt{3})^2\right]},$$

$$\mathfrak{S}_{23} = \sum e^{\frac{\pi i}{2\sqrt{3}}\left\{\xi\left[n+\frac{1}{2}+\left(m+\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}\right]^2-\eta\left[n+\frac{1}{2}-\left(m+\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}\right]^2\right\}},$$

$$\mathfrak{S}_{14} = \sum e^{\frac{\pi i}{2\sqrt{3}}\left\{\xi\left[n+\frac{1}{2}+\left(m+\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}\right]^2-\eta\left[n+\frac{1}{2}-\left(m+\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}\right]^2\right\}+\pi i(m-n+1)},$$

$$\mathfrak{S}_0 = \sum e^{\frac{\pi i}{2\sqrt{3}}\left[\xi(n+m\sqrt{3})^2-\eta(n-m\sqrt{3})^2\right]+\pi i(m+n)}.$$

Toutes les sommes portent sur les valeurs entières de m et de n, de $-\infty$ à $+\infty$.

On a de même

$$\mathfrak{S}_4 = \sum e^{\frac{\pi i}{2\sqrt{3}}\left[\xi\left(n+\frac{1}{2}+m\sqrt{3}\right)^2-\eta\left(n+\frac{1}{2}-m\sqrt{3}\right)^2\right]},$$

$$\mathfrak{S}_{01} = \sum e^{\frac{\pi i}{2\sqrt{3}}\left\{\xi\left[n+\left(m+\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}\right]^2-\eta\left[n-\left(m+\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}\right]^2\right\}}.$$

Le premier membre de (1) est une somme de termes du type

$$(4) \qquad e^{\frac{\pi i}{2\sqrt{3}}\left[\xi(M+N\sqrt{3})-\eta(M-N\sqrt{3})\right]},$$

M et N étant entiers. Le coefficient dans $\mathfrak{S}_5^2-\mathfrak{S}_0^2$, du terme (4), pour lequel M et N sont donnés, s'obtient comme il suit. On pose

$$(5) \qquad M+N\sqrt{3} = (n_1+m_1\sqrt{3})^2+(n_2+m_2\sqrt{3})^2,$$

et l'on détermine toutes les solutions en nombres entiers m_i, n_i, de cette équation; dans $\mathfrak{S}_5^2$, le coefficient du terme (4) est le nombre, $\mathfrak{N}$, de ces systèmes de solutions; dans $\mathfrak{S}_0^2$, c'est la somme $\sum(-1)^{m_1+n_1+m_2+n_2}$, étendue aux mêmes systèmes.

De même, si l'on pose

$$(6) \qquad M+N\sqrt{3} = \left[\nu_1+\tfrac{1}{2}+(\mu_1+\tfrac{1}{2})\sqrt{3}\right]^2+\left[\nu_2+\tfrac{1}{2}+(\mu_2+\tfrac{1}{2})\sqrt{3}\right]^2,$$

le coefficient du terme (4), dans $\mathfrak{S}_{23}^2$, est le nombre, $\mathfrak{N}'$, des systèmes de solutions en nombres entiers, μ_i, ν_i, de cette équation; dans $\mathfrak{S}_{14}^2$, c'est la somme $\sum(-1)^{\mu_1-\nu_1+\mu_2+\nu_2}$.

Enfin, si l'on pose

$$(7)\qquad M + N\sqrt{3} = \left[\sigma_1 + (\rho_1 + \tfrac{1}{2})\sqrt{3}\right]^2 + (\sigma_2 + \tfrac{1}{2} + \rho_2\sqrt{3})^2,$$

le coefficient, dans $\Im_4 \Im_{04}$, du terme (4), sera le nombre $\mathfrak{M}''$ des systèmes de solutions de l'équation (7) en nombres entiers ρ_i, σ_i.

On a donc, en vertu même de la relation (1),

$$(8)\qquad \mathfrak{M} + \mathfrak{M}' + \Sigma(-1)^{\mu_1+\nu_1+\mu_2+\nu_2} - \Sigma(-1)^{m_1+n_1+m_2+n_2} = 2\mathfrak{M}''.$$

Or, l'équation (5) donne

$$(5\,bis)\qquad M \equiv m_1 + n_1 + m_2 + n_2, \qquad N \equiv 0 \qquad (\text{mod } 2).$$

De même (6) et (7) donnent respectivement

$$(6\,bis)\qquad M \equiv 0, \qquad N \equiv \mu_1 + \nu_1 + \mu_2 + \nu_2 + 1 \quad (\text{mod } 2),$$

$$(7\,bis)\qquad M \equiv \rho_2 + \sigma_1 + 1, \qquad N \equiv \rho_2 + \sigma_1 \quad (\text{mod } 2).$$

6. Il faut, dès lors, distinguer quatre cas, selon les parités de M et de N.

1° M *et* N *impairs*. — Les congruences (5 *bis*) et (6 *bis*) montrent que les décompositions (5) et (6) sont impossibles; la décomposition (7) l'est aussi, puisque, par (7 *bis*), M et N sont de parités contraires; donc, tous les termes de la relation (8) sont nuls, et celle-ci est vérifiée.

2° M *et* N *pairs*. — La décomposition (7) est impossible, de sorte que $\mathfrak{M}''$ est nul; par les congruences (5 *bis*) et (6 *bis*), $\Sigma(-1)^{m_1+n_1+m_2+n_2}$ est égal à $\Sigma(+1)$, c'est-à-dire à $\mathfrak{M}$; $\Sigma(-1)^{\mu_1+\nu_1+\mu_2+\nu_2}$ est égal à $-\mathfrak{M}'$, et la relation (8) est encore vérifiée.

3° M *impair et* N *pair*. — La décomposition (6) est impossible, $\mathfrak{M}'$ et $\Sigma(-1)^{\mu_1+\nu_1+\mu_2+\nu_2}$ sont donc nuls; $m_1 + n_1 + m_2 + n_2$ étant impair, par (5 *bis*), $\Sigma(-1)^{m_1+n_1+m_2+n_2}$ est égal à $-\mathfrak{M}$, et la relation (8) s'écrit $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}'$.

Or, cette égalité s'établit aisément *a priori*. Soit, en effet, $\rho_1, \sigma_1, \rho_2, \sigma_2$ une solution quelconque de (7); $\rho_2 + \sigma_1$ est *pair* en vertu de (7 *bis*). D'ailleurs $-\rho_1 - 1, \sigma_1, \rho_2, \sigma_2$ est aussi une solution de (7),

distincte de la première, de sorte que le nombre des solutions de (7) pour lesquelles $\rho_1 + \sigma_2$ est *impair* est égal à $\frac{1}{2}\mathfrak{N}''$.

Soit alors $\rho_1, \ldots, \sigma_2$ une de ces solutions; on a identiquement, par la formule de Lagrange,

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &\{[\sigma_1 + (\rho_1 + \tfrac{1}{2})\sqrt{3}]^2 + (\sigma_2 + \tfrac{1}{2} + \rho_2\sqrt{3})^2\}\left[\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right] \\ &= \left(\frac{\sigma_1 + 3\rho_2}{2} + \frac{\rho_1 + \sigma_2 + 1}{2}\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{3\rho_1 - \sigma_2 + 1}{2} + \frac{\sigma_1 - \rho_2}{2}\sqrt{3}\right)^2. \end{aligned}\right.$$

Si donc on pose

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} n_i &= \frac{\sigma_1 + 3\rho_2}{2}, & m_i &= \frac{\rho_1 + \sigma_2 + 1}{2}, \\ n_j &= \frac{3\rho_1 - \sigma_2 + 1}{2}, & m_j &= \frac{\sigma_1 - \rho_2}{2}, \end{aligned}\right.$$

les m, n sont entiers, et l'on voit (en faisant successivement $i, j = 1, 2$ ou $2, 1$), qu'à une solution de (7), pour laquelle $\rho_1 + \sigma_2$ est impair, correspondent *deux* solutions de (5) et deux solutions *distinctes*, car, M étant impair, la congruence (5 *bis*) montre qu'on ne peut avoir à la fois $m_1 = m_2$, $n_1 = n_2$.

Inversement, si m_i, n_i, m_j, n_j est une solution quelconque de (5), on tire de (10)

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{n_i + 3m_j}{2}, & \rho_1 &= \frac{n_j + m_i - 1}{2}, \\ \sigma_2 &= \frac{3m_i - n_j - 1}{2}, & \rho_2 &= \frac{n_i - m_j}{2}. \end{aligned}\right.$$

Or, $m_1 + n_1 + m_2 + n_2$ étant impair, par (5 *bis*), l'une des quantités $n_i + m_j$ et $n_j + m_i$ est paire, la première par exemple, l'autre est impaire : les valeurs (11) des ρ, σ sont donc entières, et $\rho_1 + \sigma_2$ est évidemment impair.

Donc enfin, en vertu de la correspondance ainsi établie entre les solutions des équations (5) et (7), on a bien $\mathfrak{N} = 2 \times \frac{1}{2}\mathfrak{N}'' = \mathfrak{N}''$, et la relation (8) est encore vérifiée.

4° M *pair et* N *impair*. — La relation (8) se réduit alors à l'égalité $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N}''$, qu'on vérifie d'une manière analogue.

Donc enfin, la relation (8) est établie directement dans tous les cas; et, par là même, la relation (1) se trouve vérifiée par des raisonnements élémentaires d'arithmétique. Des considérations semblables s'appliquent aux relations (2) et (3).

Le système des formules (1), (2) et (3), ou l'une quelconque d'entre elles, caractérise le cas singulier où $g = 3g'$, et peut servir à former l'équation (dite *modulaire*) qui lie les modules de Richelot; on retrouverait ainsi la relation, de forme assez compliquée, que nous avons fait connaître précédemment ([1]).

Sans insister davantage sur ce point, nous aborderons une question intéressante, relative à la *transformation singulière* du premier degré des fonctions abéliennes pour lesquelles $g = 3g'$.

7. *Formules relatives à la transformation singulière de degré un.* — Soit $f(u, v)$ une fonction abélienne aux périodes $1, 0$; $0, 1$; g, h; h, g', avec $g = 3g'$; si l et k sont deux entiers liés par $l^2 - 3k^2 = 1$, et si l'on pose

$$(12) \qquad \mathrm{U} = lu + 3kv, \qquad \mathrm{V} = ku + lv,$$

$f(u, v)$ devient une fonction abélienne $\mathrm{F}(\mathrm{U}, \mathrm{V})$, aux paires de périodes $1, 0$; $0, 1$; G, H; H, G', définies par

$$(13) \quad \mathrm{G} = lg + 3kh, \quad \mathrm{H} = lh + 3kg' = kg - lh, \quad \mathrm{G}' = kg + lg'$$

et l'on a encore $\mathrm{G} = 3\mathrm{G}'$. Les deux fonctions $f(u, v)$ et $\mathrm{F}(\mathrm{U}, \mathrm{V})$ sont dites liées par une transformation singulière de degré un, d'indices l et k; d'ailleurs, toutes les transformations ainsi obtenues sont des puissances de l'une d'elles, T_1, pour laquelle les indices l et k correspondent à la plus petite solution positive de l'équation de Pell : $l^2 - 3k^2 = 1$ ([2]).

J'ai montré de plus ([3]) que, la forme $l^2 - 3k^2$ pouvant représenter le nombre -1, les fonctions abéliennes déduites des fonctions $f(u, v)$

([1]) *Comptes rendus*, 2e semestre 1899.

([2]) Ce Journal, 5e série, t. VI, p. 313-316.

([3]) *Ibid.*, p. 324.

par les transformations T_1^{2q} ont les mêmes modules que celles-ci ; les fonctions déduites des $f(u, v)$ par les T_1^{2q+1} ont entre elles les mêmes modules, mais *n'ont pas les mêmes modules que les* $f(u, v)$. L'invariant *douze* est le plus petit invariant (non carré) pour lequel ce dernier fait se produise.

Dès lors, se pose le problème suivant. La plus petite solution positive de $l^2 - 3k^2 = 1$ étant $l = 2$, $k = 1$, les formules (13) deviennent, pour T_1,

$$(14) \quad G = 2g + 3g, \quad H = 2h + 3g' = g + 2h, \quad G' = h + 2g',$$

et l'on demande d'exprimer les fonctions abéliennes aux périodes 1, 0 ; 0, 1 ; G, H ; H, G', à l'aide des modules des fonctions initiales, aux périodes 1, 0 ; 0, 1 ; g, h ; h, g' ; on suppose toujours $g = 3g'$. Au lieu des modules, on peut, ce qui revient au même, introduire les dix thêtas pairs d'arguments nuls, et c'est ce que nous allons faire.

Nous désignerons par ϑ les thêtas qui correspondent à g, h, g' ; par ϑ' ceux qui correspondent à G, H, G'. On a, en faisant $g = 3g'$,

$$\vartheta_5 = \vartheta_5(g, h, g') = \Sigma\, e^{\pi i [g'(3\rho^2 + \sigma^2) + 2h\rho\sigma]}$$

(ρ, σ entiers, de $-\infty$ à $+\infty$),

$$\vartheta_0 = \vartheta_0(g, h, g') = \Sigma\, e^{\pi i [g'(3\rho^2 + \sigma^2) + 2h\rho\sigma] + \pi i(\rho + \sigma)}.$$

Posons

$$\Theta_5 = \vartheta_5(2G, 2H, 2G'),$$

on a de même, par (14),

$$\Theta_5 = \Sigma\, e^{\pi i g'[3(m+n)^2 + (3m+n)^2] + 2\pi i h(3m+n)(m+n)}$$

et de là résulte immédiatement, en observant que dans $\vartheta_5 + \vartheta_0$ les termes pour lesquels $\rho + \sigma$ est impair se détruisent, tandis que ceux pour lesquels $\rho + \sigma$ est pair s'ajoutent,

$$2\Theta_5 = \vartheta_5 + \vartheta_0.$$

Nous avons vu plus haut (n° 2) que

$$4\Theta_5^2 = \vartheta_5'^2 + \vartheta_{12}'^2 + \vartheta_{34}'^2 + \vartheta_0'^2,$$

donc, on a

$$(15)\qquad \vartheta_5'^2 + \vartheta_{12}'^2 + \vartheta_{34}'^2 + \vartheta_0'^2 = (\vartheta_5 + \vartheta_0)^2.$$

On trouverait de même

$$(16)\qquad \begin{cases} 4\Theta_{01}^2 = \vartheta_5'^2 - \vartheta_{12}'^2 + \vartheta_{34}'^2 - \vartheta_0'^2 = (\vartheta_{23} + \vartheta_{14})^2, \\ 4\Theta_4^2 \;\;= \vartheta_5'^2 + \vartheta_{12}'^2 - \vartheta_{34}'^2 - \vartheta_0'^2 = (\vartheta_{23} - \vartheta_{14})^2, \\ 4\Theta_{23}^2 = \vartheta_5'^2 - \vartheta_{12}'^2 - \vartheta_{34}'^2 + \vartheta_0'^2 = (\vartheta_5 - \vartheta_0)^2. \end{cases}$$

Partons maintenant des fonctions abéliennes aux paires de périodes $1, 0$; $0, 1$; $G, -H$; $-H, G'$, et effectuons sur elles la transformation T_1 : nous trouvons, par (14), pour les périodes transformées,

$$\mathcal{G} = 2G - 3H = g, \qquad \mathcal{H} = G - 2H = h, \qquad \mathcal{G}' = -H + 2G' = g'.$$

Le changement de H en $-H$ laisse les ϑ' invariables, sauf ϑ'_{14} qui est changé de signe; il résulte de là que les équations (15) et (16) entraînent les suivantes

$$(17)\qquad \begin{cases} \vartheta_5^2 + \vartheta_{12}^2 + \vartheta_{34}^2 + \vartheta_0^2 = (\vartheta'_5 + \vartheta'_0)^2, \\ \vartheta_5^2 - \vartheta_{12}^2 + \vartheta_{34}^2 - \vartheta_0^2 = (\vartheta'_{23} - \vartheta'_{14})^2, \\ \vartheta_5^2 + \vartheta_{12}^2 - \vartheta_{34}^2 - \vartheta_0^2 = (\vartheta'_{23} + \vartheta'_{14})^2, \\ \vartheta_5^2 - \vartheta_{12}^2 - \vartheta_{34}^2 + \vartheta_0^2 = (\vartheta'_5 - \vartheta'_0)^2. \end{cases}$$

Enfin, on a, par (1), (2) et (3), puisque $g = 3g'$ et $G = 3G'$,

$$(18)\qquad \begin{cases} \vartheta_5^2 + \vartheta_{23}^2 + \vartheta_{14}^2 - \vartheta_0^2 = 2\vartheta_4\,\vartheta_{01}, & \vartheta_5'^2 + \vartheta_{23}'^2 + \vartheta_{14}'^2 - \vartheta_0'^2 = 2\vartheta'_4\,\vartheta'_{01}, \\ \vartheta_5^2 - \vartheta_{23}^2 - \vartheta_{14}^2 - \vartheta_0^2 = 2\vartheta_2\,\vartheta_{03}, & \vartheta_5'^2 - \vartheta_{23}'^2 - \vartheta_{14}'^2 - \vartheta_0'^2 = 2\vartheta'_2\,\vartheta'_{03}, \\ \vartheta_5^2 - \vartheta_{23}^2 + \vartheta_{14}^2 + \vartheta_0^2 = 2\vartheta_{12}\vartheta_{34}, & \vartheta_5'^2 - \vartheta_{23}'^2 + \vartheta_{14}'^2 + \vartheta_0'^2 = 2\vartheta'_{12}\vartheta'_{34}. \end{cases}$$

De toutes ces relations, et des relations biquadratiques générales entre les dix thêtas, on déduit sans difficulté les ϑ' en fonction des ϑ,

sous la forme :

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} 2\mathfrak{S}'^2_5 &= \mathfrak{S}^2_5 + \mathfrak{S}^2_0 + \mathfrak{S}^2_{23} + \mathfrak{S}^2_{14},\\ 2\mathfrak{S}'^2_0 &= \mathfrak{S}^2_5 + \mathfrak{S}^2_0 - \mathfrak{S}^2_{23} - \mathfrak{S}^2_{14},\\ 2\mathfrak{S}'^2_{23} &= \mathfrak{S}^2_5 - \mathfrak{S}^2_0 + \mathfrak{S}^2_{23} - \mathfrak{S}^2_{14},\\ 2\mathfrak{S}'^2_{14} &= \mathfrak{S}^2_5 - \mathfrak{S}^2_0 - \mathfrak{S}^2_{23} + \mathfrak{S}^2_{14},\end{aligned}\right. \qquad \begin{aligned} \mathfrak{S}'^2_{34} &= \mathfrak{S}_5\mathfrak{S}_0 + \mathfrak{S}_{23}\mathfrak{S}_{14},\\ \mathfrak{S}'^2_{12} &= \mathfrak{S}_5\mathfrak{S}_0 - \mathfrak{S}_{23}\mathfrak{S}_{14},\\ \mathfrak{S}'^2_{2} &= \mathfrak{S}_0\mathfrak{S}_{23} + \mathfrak{S}_5\mathfrak{S}_{14},\\ \mathfrak{S}'^2_{03} &= \mathfrak{S}_0\mathfrak{S}_{23} - \mathfrak{S}_5\mathfrak{S}_{14},\\ \mathfrak{S}'^2_{4} &= \mathfrak{S}_5\mathfrak{S}_{23} - \mathfrak{S}_0\mathfrak{S}_{14},\\ \mathfrak{S}'^2_{01} &= \mathfrak{S}_5\mathfrak{S}_{23} + \mathfrak{S}_0\mathfrak{S}_{14}.\end{aligned}$$

Les expressions des $\mathfrak{S}$ en fonction des $\mathfrak{S}'$ seraient les mêmes ; il suffirait de permuter $\mathfrak{S}_i$ et $\mathfrak{S}'_i$, sauf $\mathfrak{S}_{14}$ qui serait changé en $-\mathfrak{S}'_{14}$.

8. *Relations entre les modules de Borchardt.* — Les quantités

$$\rho = \frac{\mathfrak{S}_0}{\mathfrak{S}_5}, \qquad \sigma = \frac{\mathfrak{S}_{23}}{\mathfrak{S}_5}, \qquad \tau = \frac{\mathfrak{S}_{14}}{\mathfrak{S}_5}$$

forment un système de modules de Borchardt; elles sont liées par une équation qu'on obtient aisément. On a, d'une manière générale, entre les $\mathfrak{S}$, la relation ordinaire

$$\mathfrak{S}^2_4\mathfrak{S}^2_{01} = \mathfrak{S}^2_5\mathfrak{S}^2_{23} - \mathfrak{S}^2_0\mathfrak{S}^2_{14},$$

d'où, en substituant à $\mathfrak{S}_4\mathfrak{S}_{01}$ sa valeur (1),

$$(\mathfrak{S}^2_5 + \mathfrak{S}^2_{23} - \mathfrak{S}^2_0 + \mathfrak{S}^2_{14})^2 = 4(\mathfrak{S}^2_5\mathfrak{S}^2_{23} - \mathfrak{S}^2_0\mathfrak{S}^2_{14}),$$

c'est-à-dire

$$(1 + \sigma^2 + \tau^2 - \rho^2)^2 = 4(\sigma^2 - \rho^2\tau^2),$$

ce qu'on écrit aussi

$$(20)\qquad (\tau^2 + \rho^2)^2 + 2(1 + \sigma^2)(\tau^2 - \rho^2) + (1 - \sigma^2)^2 = 0.$$

Telle est la relation, entre les modules de Borchardt considérés, qui caractérise le cas singulier où $g = 3g'$.

Pour les fonctions abéliennes liées aux précédentes par la transfor-

mation singulière (12), introduisons les modules analogues

$$\rho' = \frac{\mathfrak{S}'_0}{\mathfrak{S}'_5}, \qquad \sigma' = \frac{\mathfrak{S}'_{23}}{\mathfrak{S}'_5}, \qquad \tau' = \frac{\mathfrak{S}'_{14}}{\mathfrak{S}'_5},$$

nous aurons, en vertu de (19),

$$\rho'^2 = \frac{1+\rho^2-\sigma^2-\tau^2}{1+\rho^2+\sigma^2+\tau^2}, \qquad \sigma'^2 = \frac{1-\rho^2+\sigma^2-\tau^2}{1+\rho^2+\sigma^2+\tau^2}, \qquad \tau'^2 = \frac{1-\rho^2-\sigma^2+\tau^2}{1+\rho^2+\sigma^2+\tau^2},$$

et ρ', σ', τ' sont liées aussi par l'équation (20).

Cas de l'invariant CINQ.

9. La relation singulière entre les périodes peut être supposée de la forme

$$g' = h + g;$$

pour trouver les relations correspondantes, les plus simples possibles, entre les dix thêtas pairs d'arguments nuls, considérons les deux produits

$$(1) \quad \mathfrak{S}_0(u, v)\mathfrak{S}_{34}(u, v)\mathfrak{S}_{12}(u, v), \quad \mathfrak{S}_{23}(u, v)\mathfrak{S}_4(u, v)\mathfrak{S}_{01}(u, v).$$

Ce sont deux fonctions thêta du troisième ordre, paires et de caractéristique nulle; avec les notations que nous avons proposées pour les seize thêtas d'ordre un et les seize demi-périodes, on reconnaît immédiatement que chacune des deux fonctions [1] s'annule simplement pour les six demi-périodes

$$(24'), \quad (34'), \quad (41'), \quad (43'), \quad (14'), \quad (42').$$

et doublement pour les trois demi-périodes

$$(44'), \quad (23'), \quad (32').$$

D'un autre côté, puisque $g' = h + g$, il existe une fonction inter-

---

[1] Ce Journal, 4ᵉ série, t. IX, p. 58; 5ᵉ série, t. V, p. 287-288.

médiaire singulière, d'indices $l = 1$, $k = 1$, de caractéristique nulle, et une seule (à un facteur constant près) [1]; le développement en série de cette fonction $\varphi_{1,1}(u, v)$ est [2]

$$\varphi_{1,1} = \sum_{\rho,\sigma} e^{2\pi i(\rho+\sigma)u + 2\pi i(\rho+2\sigma)v + \pi i[G_0(\rho+\sigma)^2 + 2H_0(\rho+\sigma)(\rho+2\sigma) + G'_0(\rho+2\sigma)^2]},$$

étant posé $G_0 = 2g - h$; $H_0 = -g + h$; $G'_0 = g$; et ρ, σ variant, par valeurs entières, de $-\infty$ à $+\infty$. On peut écrire, en posant $\rho + \sigma = n$, $\sigma = m$,

$$(2) \qquad \varphi_{1,1} = \sum_{m,n} e^{2\pi i[nu + (m+n)v] + \pi i[g(m^2+n^2) + h(2mn+n^2)]}.$$

De même, il existe une et une seule fonction intermédiaire singulière d'indices $l = 2$, $k = -1$, et de caractéristique nulle, donnée par la formule

$$(3) \qquad \varphi_{2,-1} = \sum_{m,n} e^{2\pi i[(n-m)u + mv] + \pi i[g(m^2+n^2) + h(2mn+n^2)]}.$$

D'ailleurs $\varphi_{1,1}$ s'annule pour les six demi-périodes [3]

(4) $\qquad (24'), \quad (34'), \quad (41'), \quad (44'), \quad (23'), \quad (32');$

$\varphi_{2,-1}$ s'annule pour les six demi-périodes

$$(43'), \quad (14'), \quad (42'), \quad (44'), \quad (23'), \quad (32');$$

et le produit $\varphi_{1,1}(u, v)\varphi_{2,-1}(u, v)$ est une fonction thêta normale, d'ordre trois et de caractéristique nulle.

Ce produit, par ce qui précède, s'annule simplement pour les six demi-périodes, et doublement pour les trois demi-périodes qui annulent simplement et doublement les deux fonctions (1): donc, ρ désignant une constante arbitraire, les deux thêtas d'ordre trois,

---

(1) Ce Journal, 5e série, t. V, p. 271-277 et p. 318-319.

(2) *Ibid.*, p. 274.

(3) *Ibid.*, p. 293.

en u, v,

$$(5)\quad \begin{cases} \varphi_{1,1}(u, v)\,\varphi_{2,-1}(u, v) \\ \text{et} \\ \mathfrak{S}_0(u, v)\,\mathfrak{S}_{34}(u, v)\,\mathfrak{S}_{12}(u, v) + \rho\,\mathfrak{S}_{23}(u, v)\,\mathfrak{S}_4(u, v)\,\mathfrak{S}_{01}(u, v) \end{cases}$$

ont, pour ces demi-périodes, un nombre de zéros communs égal à $6 + 4 \times 3 = 18$, et l'on peut disposer de ρ de manière à leur donner un dix-neuvième zéro commun; mais deux thêtas d'ordre trois n'ayant que $2.3.3 = 18$ zéros communs, il faut alors que les deux fonctions (5) aient un facteur commun, et comme $\varphi_{1,1}$, $\varphi_{2,-1}$ sont évidemment indécomposables, les deux fonctions (3), pour une valeur convenable de ρ, sont identiques, à un facteur constant près. On a donc, λ et μ désignant des constantes convenables,

$$(6)\quad \begin{cases} \lambda\,\mathfrak{S}_0(u, v)\,\mathfrak{S}_{34}(u, v)\,\mathfrak{S}_{12}(u, v) + \mu\,\mathfrak{S}_{23}(u, v)\,\mathfrak{S}_4(u, v)\,\mathfrak{S}_{01}(u, v) \\ = \mathfrak{S}_5(0, 0)\,\varphi_{1,1}(u, v)\,\mathfrak{S}_{2,-1}(u, v). \end{cases}$$

Pour déterminer λ, faisons, dans cette relation, $u = 0$, $v = \frac{1}{2}$ [ce qui correspond à la demi-période $(12')$, annulant $\mathfrak{S}_{23}(u, v)$ et $\mathfrak{S}_4(u, v)$]; il reste ainsi

$$(7)\quad \lambda\,\mathfrak{S}_0(0, \tfrac{1}{2})\,\mathfrak{S}_{34}(0, \tfrac{1}{2})\,\mathfrak{S}_{12}(0, \tfrac{1}{2}) = \mathfrak{S}_5(0, 0)\,\varphi_{1,1}(0, \tfrac{1}{2})\,\varphi_{2,-1}(0, \tfrac{1}{2}).$$

Or, par les développements (2) et (3), on a, en tenant compte de $g' = h + g$,

$$\varphi_{1,1}\ (0, \tfrac{1}{2}) = \sum e^{\pi i(gm^2+2hmn+g'n^2)+\pi i(m+n)} = \mathfrak{S}_0(0, 0),$$

$$\varphi_{2,-1}(0, \tfrac{1}{2}) = \sum e^{\pi i(gm^2+2hmn+g'n^2)+\pi i m} = \mathfrak{S}_{12}(0, 0).$$

D'ailleurs,

$$\mathfrak{S}_0(0, \tfrac{1}{2}) = \mathfrak{S}_{12}(0, 0); \qquad \mathfrak{S}_{34}(0, \tfrac{1}{2}) = \mathfrak{S}_5(0, 0);$$
$$\mathfrak{S}_{12}(0, \tfrac{1}{2}) = \mathfrak{S}_0(0, 0),$$

de sorte que l'équation (7) donne $\lambda = 1$. On trouverait de même, en fai-

sant, dans (6), $u = \frac{h}{2}$, $v = \frac{g'}{2}$ [ce qui répond à la demi-période (13')], $\mu = 1$; de sorte qu'on a l'identité

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &\vartheta_0(u, v)\,\vartheta_{34}(u, v)\,\vartheta_{12}(u, v) + \vartheta_{23}(u, v)\,\vartheta_4(u, v)\,\vartheta_{01}(u, v) \\ &= \vartheta_5(0, 0)\,\varphi_{1,1}(u, v)\,\varphi_{2,-1}(u, v). \end{aligned}\right.$$

Si l'on y suppose $u = v = 0$, il vient, *entre les thêtas d'ordre un et d'arguments nuls, la relation*

$$(9)\qquad \vartheta_0\vartheta_{34}\vartheta_{12} + \vartheta_{23}\vartheta_4\vartheta_{01} = \vartheta_5^3,$$

car $\varphi_{1,1}(0, 0)$ et $\varphi_{2,-1}(0, 0)$ sont égaux à $\vartheta_5(0, 0)$, en vertu même de (2) et (3), et de $g' = h + g$.

En considérant les *neuf* caractéristiques paires, autres que (0, 0, 0, 0), on obtiendrait *neuf* relations du même type que (8). Par exemple,

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &-\vartheta_2(u, v)\,\vartheta_{12}(u, v)\,\vartheta_{14}(u, v) + \vartheta_5(u, v)\,\vartheta_{01}(u, v)\,\vartheta_{23}(u, v) \\ &= \quad \vartheta_4(0, 0)\,\psi_{1,1}(u, v)\,\psi_{2,-1}(u, v). \end{aligned}\right.$$

Ici, les deux membres sont des thêtas de caractéristique $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$, qui est celle de $\vartheta_4(u, v)$; $\psi_{1,1}$ est la fonction intermédiaire singulière d'indices $l = 1$, $k = 1$, et de caractéristique $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$; $\psi_{2,-1}$ celle d'indices $l = 2$, $k = -1$, de caractéristique $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$. On a

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} \psi_{1,1}\;(u, v) &= \sum_{m,n} e^{2\pi i\,[(n+\frac{1}{2})u+(m+n+\frac{1}{2})v] + \pi i\,\{g[m^2+(n+\frac{1}{2})^2] + h[2m(n+\frac{1}{2})+(n+\frac{1}{2})^2]\}}, \\ \psi_{2,-1}(u, v) &= \sum_{m,n} e^{2\pi i\,[(n+m+\frac{1}{2})u+mv] + \pi i\,\{g[m^2+(n+\frac{1}{2})^2] + h[2m(n+\frac{1}{2})+(n+\frac{1}{2})^2]\}}. \end{aligned}\right.$$

Si l'on fait $u = v = 0$ dans l'identité (10), on obtient, *entre les thêtas d'arguments nuls*, la relation

$$(12)\qquad -\vartheta_2\vartheta_{12}\vartheta_{14} + \vartheta_5\vartheta_{01}\vartheta_{23} = \vartheta_4^3.$$

10. Voici le Tableau complet des dix relations de cette espèce que donne l'application de la méthode [1] :

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned}
&\mathfrak{S}_4^3 + \mathfrak{S}_2\,\mathfrak{S}_{12}\mathfrak{S}_{14} - \mathfrak{S}_5\,\mathfrak{S}_{01}\mathfrak{S}_{23} = 0,\\
&\mathfrak{S}_{03}^3 - \mathfrak{S}_2\,\mathfrak{S}_0\,\mathfrak{S}_{23} + \mathfrak{S}_{34}\mathfrak{S}_{14}\mathfrak{S}_{01} = 0,\\
&\mathfrak{S}_2^3 - \mathfrak{S}_0\,\mathfrak{S}_{23}\mathfrak{S}_{03} - \mathfrak{S}_4\,\mathfrak{S}_{12}\mathfrak{S}_{14} = 0,\\
&\mathfrak{S}_{01}^3 - \mathfrak{S}_{14}\mathfrak{S}_{03}\mathfrak{S}_{34} - \mathfrak{S}_5\,\mathfrak{S}_4\,\mathfrak{S}_{23} = 0,\\
&\mathfrak{S}_{14}^3 + \mathfrak{S}_{34}\mathfrak{S}_{01}\mathfrak{S}_{03} - \mathfrak{S}_{12}\mathfrak{S}_2\,\mathfrak{S}_4 = 0,\\
&\mathfrak{S}_{23}^3 - \mathfrak{S}_5\,\mathfrak{S}_4\,\mathfrak{S}_{01} + \mathfrak{S}_2\,\mathfrak{S}_0\,\mathfrak{S}_{03} = 0;
\end{aligned}\right.$$

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned}
&\mathfrak{S}_5^3 - \mathfrak{S}_0\,\mathfrak{S}_{34}\mathfrak{S}_{12} - \mathfrak{S}_{23}\mathfrak{S}_4\,\mathfrak{S}_{01} = 0,\\
&\mathfrak{S}_{34}^3 - \mathfrak{S}_{12}\mathfrak{S}_5\,\mathfrak{S}_0 - \mathfrak{S}_{01}\mathfrak{S}_{14}\mathfrak{S}_{03} = 0,\\
&\mathfrak{S}_0^3 + \mathfrak{S}_2\,\mathfrak{S}_{03}\mathfrak{S}_{23} - \mathfrak{S}_{12}\mathfrak{S}_{34}\mathfrak{S}_5 = 0,\\
&\mathfrak{S}_{12}^3 + \mathfrak{S}_{14}\mathfrak{S}_4\,\mathfrak{S}_2 - \mathfrak{S}_0\,\mathfrak{S}_5\,\mathfrak{S}_{34} = 0.
\end{aligned}\right.$$

11. *Conséquences arithmétiques.* — On déduit de ces équations quelques conséquences arithmétiques intéressantes.

Dans la première équation (13) on a, pour $\mathfrak{S}_4$, après remplacement de g' par $h+g$, la série

$$\mathfrak{S}_4 = \sum_{m,n} e^{\pi i g\left[m^2+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right]+\pi i h\left[2m\left(n+\frac{1}{2}\right)-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right]}$$

qu'on peut mettre sous une forme plus commode. Posons

$$(15)\qquad \omega = \frac{1+\sqrt{5}}{2};\qquad \omega' = \frac{1-\sqrt{5}}{2};$$

ω et ω' sont les racines de l'équation $\omega^2-\omega-1=0$, et sont des unités du *corps quadratique* $\sqrt{5}$; si l'on fait ensuite

$$(16)\qquad g = \frac{\xi-\eta}{\sqrt{5}},\qquad h = \frac{\omega\xi-\omega'\eta}{\sqrt{5}},$$

---

[1] *Voir* une autre démonstration dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 5 mars 1906. On pourrait aussi suivre une méthode analogue à celle indiquée en note au n° 5.

il vient

$$\mathfrak{Z}_4 = \sum_{m,n} e^{\frac{\pi i}{\sqrt{5}}\{\xi[m+(n+\frac{1}{2})\omega]^2 - \eta[m+(n+\frac{1}{2})\omega']^2\}}.$$

Dès lors, $\mathfrak{Z}_4^3$ est une somme de termes du type

$$(17) \qquad e^{\frac{\pi i}{\sqrt{5}}\{\xi(M+N\omega)-\eta(M+N\omega')\}},$$

M et N étant entiers ou fractionnaires; le coefficient, dans $\mathfrak{Z}_4^3$, du terme (17), pour lequel M et N sont donnés, s'obtiendra comme il suit. On posera

$$(18) \quad \begin{cases} M + N\omega = [m_1 + (n_1 + \frac{1}{2})\omega]^2 \\ \qquad + [m_2 + (n_2 + \frac{1}{2})\omega]^2 + [m_3 + (n_3 + \frac{1}{2})\omega]^2, \end{cases}$$

et l'on déterminera toutes les solutions en nombres entiers, m_i, n_i, de cette équation : le coefficient cherché sera le nombre $\mathfrak{N}$ de ces systèmes de solutions.

De même, dans le produit $\mathfrak{Z}_5\mathfrak{Z}_{01}\mathfrak{Z}_{23}$, le coefficient du terme (17) sera le nombre $\mathfrak{N}$ des systèmes de solutions entières μ_i, ν_i, de l'équation

$$(19) \quad M + N\omega = (\mu_1 + \nu_1\omega)^2 + (\mu_2 + \tfrac{1}{2} + \nu_2\omega^2) + [\mu_3 + \tfrac{1}{2} + (\nu_3 + \tfrac{1}{2})\omega]^2;$$

enfin, dans le produit $\mathfrak{Z}_2\mathfrak{Z}_{12}\mathfrak{Z}_{14}$, ce sera la somme

$$\Sigma(-1)^{\mu_1+\nu_2+\mu_3+\nu_3+1}$$

étendue aux mêmes systèmes de solutions.

On a ainsi, en vertu même de la première équation (13), la relation

$$(20) \qquad \mathfrak{N} - \mathfrak{N} + \Sigma(-1)^{\mu_1+\nu_2+\mu_3+\nu_3+1} = 0.$$

Or, les équations (18) et (19) donnent immédiatement

$$M \equiv m_1 + m_2 + m_3 + \tfrac{3}{4} \pmod 2,$$
$$N \equiv m_1 + m_2 + m_3 + \tfrac{3}{4} \pmod 2,$$
$$M \equiv \mu_1 + \nu_1 + \nu_2 + \tfrac{3}{4} \pmod 2,$$
$$N \equiv \nu_1 + \mu_3 + \nu_3 + \tfrac{3}{4} \pmod 2,$$

ce qui montre que $M - \frac{3}{4}$ et $N - \frac{3}{4}$ sont des entiers de même parité, et que dès lors $\mu_1 + \nu_2 + \mu_3 + \nu_3$ est pair; la relation (20) s'écrit par suite

$$\mathfrak{N} = 2\mathfrak{N}',$$

d'où ce théorème, *relatif aux décompositions d'un entier du corps quadratique $\sqrt{5}$ en sommes de carrés de trois entiers,* appartenant au même corps :

Si A *et* B *désignent des entiers ordinaires, positifs, nuls ou négatifs, de même parité, le nombre des décompositions de*

$$4A + 3 + \omega(4B + 3)$$

en somme de trois carrés selon la formule

$$(21) \qquad \left\{ \begin{array}{l} [2m_1 + (2n_1 + 1)\omega]^2 + [2m_2 + (2n_2 + 1)\omega]^2 \\ + [2m_3 + (2n_3 + 1)\omega]^2 \end{array} \right.$$

est double du nombre des décompositions de la même quantité selon la formule

$$(22) \quad (2\mu_1 + 2\nu_1\omega)^2 + (2\mu_2 + 1 + 2\nu_2\omega)^2 + [2\mu_3 + 1 + (2\nu_3 + 1)\omega]^2.$$

Dans cet énoncé et dans les suivants, les m_i, n_i, μ_i, ν_i sont des entiers ordinaires, positifs, nuls ou négatifs; deux décompositions (21) telles que $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ et $\beta^2 + \alpha^2 + \gamma^2$ sont regardées comme distinctes, à moins que β ne soit identique à α.

La seconde équation (13) conduit au même résultat; la troisième et la quatrième donnent cette proposition :

Si A *et* B *sont des entiers ordinaires quelconques, le nombre des décompositions de* $4A + 3 + 8B\omega$ *selon la formule*

$$(2m_1 + 1 + 2n_1\omega)^2 + (2m_2 + 1 + 2n_2\omega)^2 + (2m_3 + 1 + 2n_3\omega)^2$$

est double de celui des décompositions de la même quantité selon la formule

$$(2\mu_1 + 2\nu_1\omega)^2 + [2\mu_2 + (2\nu_2 + 1)\omega]^2 + [2\mu_3 + 1 + (2\nu_3 + 1)\omega]^2.$$

Des deux dernières équations (13), on déduit que :

Si A *et* B *sont des entiers ordinaires quelconques, le nombre des décompositions de* $8A + 6 + \omega(4B + 1)$ *selon la formule*

$$[2m_1 + 1 + (2n_1 + 1)\omega]^2 + [2m_2 + 1 + (2n_2 + 1)\omega]^2 + [2m_3 + 1 + (2n_3 + 1)\omega]^2$$

est double de celui des décompositions de la même quantité selon la formule

$$(2\mu_1 + 2\nu_1\omega)^2 + [2\mu_2 + (2\nu_2 + 1)\omega]^2 + (2\mu_3 + 1 + 2\nu_3\omega)^2.$$

12. Examinons maintenant, au point de vue des conséquences arithmétiques, les équations (14); il suffira de considérer la première. Elle donne immédiatement le résultat suivant :

Soient M et N deux entiers ordinaires quelconques; considérons les deux décompositions de $M + N\omega$,

$$\text{(I)}\qquad M + N\omega = (m_1 + n_1\omega)^2 + (m_2 + n_2\omega)^2 + (m_3 + n_3\omega)^2,$$

$$\text{(II)}\quad \left\{ \begin{aligned} M + N\omega = {} & [\mu_1 + (\nu_1 + \tfrac{1}{2}\omega)^2 + (\mu_2 + \tfrac{1}{2} + \nu_2\omega)^2 \\ & + [\mu_3 + \tfrac{1}{2} + (\nu_3 + \tfrac{1}{2})\omega]^2; \end{aligned} \right.$$

soient $\mathfrak{N}_1$ et $\mathfrak{N}_2$ les nombres respectifs de ces décompositions, on a, par la première équation (14),

$$(23)\qquad \mathfrak{N}_1 - \mathfrak{N}_2 - \Sigma(-1)^{m_1+n_1+n_2+m_3} = 0,$$

la somme étant étendue à tous les systèmes entiers, m_i, n_i, qui satisfont à (I).

L'équation (23) donne un théorème facile à énoncer; mais on peut aller plus loin et obtenir une relation entre $\mathfrak{N}_1$ et $\mathfrak{N}_2$. Supposons d'abord que, dans chacune des décompositions (I), les trois quantités $m_i + n_i\omega$ soient distinctes deux à deux, et *ne regardons pas comme différentes deux décompositions* (I) *qui diffèrent seulement par l'ordre* des trois quantités élevées au carré. D'après cela, une décomposition (I) compte pour six unités dans $\mathfrak{N}_1$; dans $\Sigma(-1)^{m_1+n_1+n_2+m_3}$,

elle donne les six termes

$$(24)\qquad (-1)^\alpha + (-1)^\beta + (-1)^\gamma + (-1)^\delta + (-1)^\varepsilon + (-1)^\theta,$$

étant posé

$$(25)\qquad \begin{cases} \alpha = m_1 + n_1 + n_2 + m_3, \qquad \gamma = m_2 + n_2 + n_1 + m_3, \\ \qquad\qquad \varepsilon = m_3 + n_3 + n_1 + m_2, \\ \beta = m_1 + n_1 + n_3 + m_2, \qquad \delta = m_2 + n_2 + n_3 + m_1, \\ \qquad\qquad \theta = m_3 + n_3 + n_2 + m_1. \end{cases}$$

Étudions maintenant la parité des six quantités $\alpha, \beta, \ldots, \theta$.
On déduit de (I)

$$(26)\qquad M \equiv m_1 + m_2 + m_3 + n_1 + n_2 + n_3 \quad N \equiv n_1 + n_2 + n_3 \pmod 2;$$

et, par (25),

$$(27)\qquad \begin{cases} m_1 \equiv M + N + \beta + \gamma + \delta, \quad m_2 \equiv M + N + \alpha + \beta + \delta, \\ \qquad\qquad m_3 \equiv M + N + \alpha + \gamma, \\ n_1 \equiv N + \alpha + \gamma + \delta, \qquad n_2 \equiv N + \alpha + \beta + \gamma \qquad \pmod 2, \\ \qquad\qquad n_3 \equiv N + \beta + \delta \qquad \pmod 2, \\ \quad \varepsilon \equiv \alpha + \delta, \qquad \theta \equiv \beta + \gamma. \end{cases}$$

De plus, l'équation (I) donne

$$M = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + n_1^2 + n_2^2 + n_3^2,$$
$$N = 2m_1 n_1 + 2m_2 n_2 + 2m_3 n_3 + n_1^2 + n_2^2 + n_3^2,$$

d'où, en utilisant (27),

$$M \equiv 3(M+N)^2 + 3N^2 + 2(\alpha\gamma + \beta\delta) \qquad \pmod 4,$$
$$N \equiv 3N^2 + 6N(M+N) + 2\alpha\beta + 2\beta\delta + 2\gamma\delta \qquad \pmod 4.$$

ce qu'on écrit

$$(28)\qquad \frac{M^2+M}{2} \equiv N(M+1)+\alpha\gamma+\beta\delta \pmod 2,$$

$$(29)\qquad \frac{N^2+N}{2} \equiv MN+\alpha\beta+\beta\delta+\gamma\delta \pmod 2.$$

15. Distinguons maintenant plusieurs cas.

Premier cas : *le nombre* $\frac{M^2+M}{2}+N(M+1)$ *est impair.* — La congruence (28) n'a alors, en α, β, γ, δ, que *six* solutions, d'après un résultat bien connu dans la théorie des caractéristiques des thêtas à deux variables; elles sont données par le Tableau suivant, complété par les valeurs de ε et θ, déduites de (27).

α.	β.	γ.	δ.	ε.	θ.
1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1
1	1	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0
1	1	0	1	0	1

Par suite, quatre des six quantités sont impaires et deux sont paires, dans tous les cas; donc, sans avoir besoin d'étudier la congruence (29), on est sûr que la somme des six unités (24) est égale à $-4+2=-2$, de sorte que, dans $\mathfrak{N}_1-\Sigma(-1)^{m_1+n_1+n_2+m_3}$, chaque décomposition (I) donne $6+2=8$ unités et l'équation (23) montre que le nombre des décompositions (II) est *huit* fois celui des décompositions (I).

On a supposé, dans (I), les trois quantités $m_i+n_i\omega$ distinctes deux à deux. Si deux d'entre elles sont égales, c'est-à-dire si $m_1=m_2$, $n_1=n_2$, la troisième étant différente, la décomposition (I) considérée donne, dans $\mathfrak{N}_1$, *trois* unités, et l'on reconnaît, par la méthode du cas général, qu'elle en donne *une* dans $-\Sigma(-1)^{m_1+n_1+n_2+m_3}$; on dira alors que le nombre des décompositions (II) est toujours égal à *huit* fois celui des décompositions (I), avec la restriction de compter seulement pour $\frac{1}{2}$ une décomposition (I) dans laquelle deux des quantités $m_i+n_i\omega$ coïncident.

Enfin, les trois quantités $m_i + n_i\omega$ d'une même décomposition (I) ne peuvent être égales entre elles; car on aurait alors, par (I),

$$M = 3m^2 + 3n^2, \qquad N = 6mn + 3n^2,$$

et le nombre $\frac{M^2+M}{2} + N(M+1)$ serait pair, contrairement à l'hypothèse.

Deuxième cas : $\frac{M^2+M}{2} + N(M+1)$ *est pair*, $\frac{N^2+N}{2} + MN$ *est impair.* — La congruence (28) a alors *dix* solutions en $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, mais *trois* seulement vérifient la congruence (29), ce sont les suivantes :

α.	β.	γ.	δ.	ε.	θ.
1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1

Dès lors, quatre des six quantités sont impaires, deux sont paires, et l'on retombe exactement sur les conclusions du premier cas.

Troisième cas : $\frac{M^2+M}{2} + N(M+1)$ *et* $\frac{N^2-N}{2} + PN$ *sont pairs.* — Les congruences (28) et (29) admettent les *sept* solutions :

α.	β.	γ.	δ.	ε.	θ.
0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0

Si on laisse de côté la première solution, on voit que, dans chacune des autres, quatre des six quantités $\alpha, \ldots, \theta$ sont paires et deux impaires, de sorte que la somme (24) est égale à $4 - 2 = 2$. Donc une décomposition (I), dans laquelle les trois $m_i + n_i\omega$ sont distincts et les six quantités $\alpha, \beta, \ldots, \theta$ non simultanément paires, donne, dans $\mathfrak{N}_1 - \Sigma(-1)^{m_1+n_1+n_2+m_2}$, $6 - 2 = 4$ unités.

Si, au contraire, $\alpha, \beta, \ldots, \theta$ sont tous pairs, ou, ce qui revient au même par (27), si l'on a

$$m_1 \equiv m_2 \equiv m_3 \equiv M + N, \qquad n_1 \equiv n_2 \equiv n_3 \equiv N \pmod 2,$$

la décomposition considérée donne $6 - 6 = 0$ unité, c'est-à-dire *ne compte pas*.

Donc, en admettant que, dans chaque décomposition (I), les trois $m_i + n_i\omega$ soient deux à deux distincts, on peut dire que, par (23), le nombre des décompositions (II) est *quatre* fois celui des décompositions (I), avec la restriction qu'une décomposition (I) dans laquelle les m_i ont la parité de $M + N$ et les n_i celles de N, compte pour zéro.

14. Il est facile maintenant de traiter d'une manière analogue le cas où deux au moins des $m_i + n_i\omega$ d'une même décomposition seraient égaux, et voici le résultat final : les trois dernières équations (14) conduisent à la même conclusion.

Soient M et N des entiers ordinaires quelconques; considérons les décompositions de $4M + 4N\omega$ *en sommes de trois carrés selon les formules*

$$\text{(I)} \qquad (2m_1 + 2n_1\omega)^2 + (2m_2 + 2n_2\omega)^2 + (2m_3 + 2n_3\omega)^2,$$

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} [2\mu_1 + (2\nu_1 + 1)\omega]^2 + (2\mu_2 + 1 + 2\nu_2\omega)^2 \\ + [2\mu_3 + 1 + (2\nu_3 + 1)\omega]^2. \end{cases}$$

1° *Si l'un au moins des nombres*

$$\tfrac{1}{2}(M + 1)(M + 2N) \qquad \textit{et} \qquad \tfrac{1}{2}N(N - 1 + 2M)$$

est impair, le nombre des décompositions (II) *est huit fois celui des décompositions* (I) : *les décompositions* (I) *qui diffèrent seulement par l'ordre des trois quantités* $2m_i + 2n_i\omega$ *ne comptent que pour une seule; une décomposition* (I) *dans laquelle deux de ces trois quantités sont égales ne compte que pour* $\frac{1}{2}$; *enfin les trois quantités ne peuvent être égales entre elles.*

2° *Si les deux nombres* $\frac{1}{2}(M + 1)(M + 2N)$ *et* $\frac{1}{2}N(N - 1 + 2M)$ *sont pairs, le nombre des décompositions* (II) *est quatre fois celui*

des décompositions (I) : *les décompositions* (I) *qui diffèrent seulement par l'ordre des trois quantités* $2m_i + 2n_i\omega$ *ne comptent que pour une ; celles où deux au moins de ces trois quantités sont égales comptent pour zéro ; enfin une décomposition* (I) *où tous les* m_i *ont la parité de* $M + N$ *et tous les* n_i *celle de* N *compte également pour zéro.*

15. *Extension des résultats arithmétiques.* — Nous n'avons fait appel, jusqu'ici, qu'aux relations (13) et (14), sans utiliser les identités plus générales, telles que (8) et (10), dont elles dérivent.

Partons cette fois de l'identité (10), regardons-y g et h, c'est-à-dire ξ et η [équations (16)], comme les variables indépendantes, u et v comme des paramètres : en égalant, dans les deux membres de (10), les coefficients de l'exponentielle (17), on arrive au résultat qui suit.

Reprenons les décompositions (I) et (II) ci-dessus de $4M + 4M\omega$; regardons cette fois comme distinctes deux décompositions (I) qui diffèrent par l'ordre des trois quantités élevées au carré ; posons

$$\mathcal{A} = \Sigma'(-1)^{m_1+n_1+n_2+m_3}\, e^{2\pi i(m_1-m_2+m_3)u+2\pi i(n_1-n_2+n_3)v},$$

$$\mathcal{C} = \Sigma' e^{2\pi i(n_1+n_2-m_2)u+2\pi i(m_1+n_1+m_2)v},$$

les deux sommes Σ' s'étendant à toutes les décompositions (I) du nombre donné $4M + 4N\omega$,

$$\mathcal{B} = \Sigma'' e^{2\pi i(\mu_1+\mu_2+\mu_3+1)u+2\pi i(\nu_1+\nu_2+\nu_3+1)v},$$

la somme Σ'' s'étendant à toutes les décompositions (II) du même nombre : on a, quels que soient u et v,

$$\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}.$$

On en conclut, en développant les exponentielles suivant les puissances croissantes de u, v, et identifiant les développements des deux membres,

$$\begin{aligned}\Sigma''(\mu_1+\mu_2+\mu_3+1)^p(\nu_1+\nu_2+\nu_3+1)^q \\ = \Sigma'(n_1+n_2-m_2)^p(m_1+n_1+m_2)^q \\ -\Sigma'(-1)^{m_1+n_1+n_2+m_3}(m_1+m_2+m_3)^p(n_1+n_2+n_3)^q.\end{aligned}$$

p et q désignant des entiers ordinaires quelconques, non négatifs; la somme Σ'' s'étend à toutes les décompositions (II); les sommes Σ' à toutes les décompositions (I), deux de ces décompositions qui diffèrent par l'ordre des trois quantités élevées au carré *étant regardées comme distinctes.*

Supposons maintenant, pour fixer les idées, qu'une au moins des deux quantités $\frac{1}{2}M(M+2N)$ et $\frac{1}{2}N(N-1+2M)$ soit impaire; nous avons vu que, parmi les six quantités $m_i+n_i+n_j+m_k\,(i, j, k=1, 2, 3$ et deux à deux distincts), quatre sont impaires et deux paires; dès lors, si Σ désigne une somme étendue aux décompositions (I), deux de ces décompositions qui ne diffèrent que par l'ordre des termes élevés au carré *n'étant pas regardées comme distinctes* (et c'est ce que nous admettrons dans les énoncés suivants), on a

$$\begin{aligned}\Sigma''(\mu_1+\mu_2+\mu_3+1)^p(\nu_1+\nu_2+\nu_3+1)^q \\ = \Sigma'(n_1+n_2-m_2)^p(m_1+n_1+m_2)^q \\ +2\Sigma(m_1+m_2+m_3)^p(n_1+n_2+n_3)^q.\end{aligned}$$

Par suite, évidemment, si, pour chaque décomposition (I), on écrit les *six* quantités $n_1+n_2-m_2$; $n_1+n_2-m_1$; $n_1+n_3-m_3$; $n_1+n_3-m_1$; $n_2+n_3-m_3$; $n_2+n_3-m_2$, et *deux* fois la quantité $m_1+m_2+m_3$, le Tableau ainsi obtenu est identique à celui que forment les quantités $\mu_1+\mu_2+\mu_3+1$, pour toutes les décompositions (II). Si deux des quantités $2m_i+2n_i\omega$ d'une même décomposition (I) sont égales, par exemple si $m_1=m_2$, $n_1=n_2$, on écrira, pour cette décomposition, les *trois* quantités $2n_1+m_1$, $n_1+n_3-m_3$, $n_1+n_3-m_1$, et *une* fois la quantité $2m_1+m_3$, et la proposition subsistera.

On a un théorème pareil en remplaçant $n_1+n_2-m_2$, ... par $m_1+n_1+m_2$, ...; $m_1+n_2+m_3$ par $n_1+n_2+n_3$, et $\mu_1+\mu_2+\mu_3+1$ par $\nu_1+\nu_2+\nu_3+1$.

Ces propositions, qui s'étendent aisément au cas où les deux quantités $\frac{1}{2}M(M+2N)$ et $\frac{1}{2}N(N-1+2M)$ sont paires, mettent sur la voie d'une démonstration directe de nos résultats arithmétiques; nous n'insisterons pas davantage sur ce point.

16. *Remarque.* — On peut observer que les relations biquadratiques classiques entre les dix thêtas d'arguments nuls donnent des propositions simples sur les décompositions en sommes de quatre carrés des nombres du corps quadratique $\sqrt{\mathrm{D}}$; par exemple, de l'équation $\vartheta_4^4 - \vartheta_{01}^4 = \vartheta_{03}^4 - \vartheta_2^4$, on déduit que :

Si M et N sont des entiers ordinaires quelconques, dont le second est impair, les nombres de décompositions de $4\mathrm{M} + 4\mathrm{N}\sqrt{\mathrm{D}}$ en quatre carrés selon les deux formules

$$(2m_1 + 1 + 2n_1\sqrt{\mathrm{D}})^2 + (2m_2 + 1 + 2n_2\sqrt{\mathrm{D}})^2 + (2m_3 + 1 + 2n_3\sqrt{\mathrm{D}})^2 + (2m_4 + 1 + 2n_4\sqrt{\mathrm{D}})^2$$

et

$$[2\mu_1 + (2\nu_1 + 1)\sqrt{\mathrm{D}}]^2 + [2\mu_2 + (2\nu_2 + 1)\sqrt{\mathrm{D}}]^2 + [2\mu_3 + (2\nu_3 + 1)\sqrt{\mathrm{D}}]^2 + [2\mu_4 + (2\nu_4 + 1)\sqrt{\mathrm{D}}]^2$$

sont égaux.

Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre du type hyperbolique

(Second Mémoire);

PAR M. R. D'ADHÉMAR.

Je me propose de simplifier notablement les résultats obtenus dans mon premier Mémoire, inséré dans ce Journal en 1904, et de les compléter par un certain nombre de résultats nouveaux.

Il s'agira exclusivement de l'équation que j'appellerai *équation des ondes :*

$$(1) \qquad A(u) = F(x, y, z),$$

A représentant l'opération

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right),$$

et de l'intégrale *réelle* déterminée par des données sur une frontière réelle.

Cette intégrale se présente sous la forme intéressante de la différence finie de deux termes infinis.

L'on peut, cependant, arriver à manier très facilement ces expressions et à prouver :

1° Que l'intégrale prend la valeur donnée, à la frontière;

2° Que si, à l'intégrale, on applique l'opération A, l'équation (1) est vérifiée.

Alors on peut dire que l'intégration de (1) est achevée.

Je vais résoudre complètement ce double problème, après une remarque préliminaire qui n'avait pas été faite dans mon premier Mémoire.

Remarques sur les données du problème.

Pour l'équation des ondes

$$A(u) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right) u = 0,$$

l'on peut intégrer si, sur une frontière S, l'on connaît les valeurs de u et de sa dérivée conormale.

« La donnée u est seule nécessaire et suffisante si S est un cône formé de droites à 45° sur l'axe vertical : nous dirons droites β. »

J'ai, le premier, donné ce théorème en introduisant la *conormale* dans les formules de M. Volterra.

Il me paraît intéressant de démontrer à nouveau mon théorème sans me servir de la *conormale*, au point de vue qui est celui du théorème général d'existence de Cauchy et Mme de Kowaleska.

Je reprends pour cela, en deux mots, la théorie générale des *caractéristiques*, de Beudon, d'après l'exposé de M. Hadamard [1].

Écrivons

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = p_i, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = p_{ik};$$

la surface frontière S sera

$$x_3 = f(x_1, x_2)$$

avec

$$P_1 = \frac{\partial x_3}{\partial x_1}, \qquad P_2 = \frac{\partial x_3}{\partial x_2}, \qquad P_{11} = \frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1^2}, \qquad \cdots$$

Sur S l'on donne $u = \overline{u}(x_1, x_2)$ et $p_3 = \overline{p}_3(x_1, x_2)$.

---

[1] *Leçons sur la propagation des ondes*. Hermann, 1903, p. 263.

Comme l'on a

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial x_1} = p_1 + p_3 P_1,$$

l'on voit que la donnée $\overline{p_3}$ détermine $\overline{p_1}$ et de même $\overline{p_2}$.

Puis il est facile de voir que $\overline{p_{ik}}$ est déterminé par $\overline{p_{33}}$ et que cette dérivée est fournie par l'équation

$$H\overline{p_{23}} + K = 0,$$

où l'on a posé

$$H = P_1^2 + P_2^2 - 1,$$

$$K = \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x_2^2} - \overline{p_3}(P_{11} + P_{22}) - 2P_1 \frac{\partial \overline{p_3}}{\partial x_1} - 2P_2 \frac{\partial \overline{p_3}}{\partial x_2}.$$

Les *surfaces caractéristiques* sont données par

$$H = 0.$$

Ce sont bien des assemblages de droites β.

Mais, si l'on a $H = 0$, *on ne peut plus se donner arbitrairement* $\overline{p_3}$, car cette fonction $\overline{p_3}$ devra être une solution de l'équation

$$K = 0.$$

Si l'on prend une caractéristique quelconque, $\overline{p_3}$ contient un certain arbitraire : c'est le cas général.

Mais ici nous prenons une caractéristique très spéciale, un cône $x_3^2 = x_1^2 + x_2^2$. Au sommet Ω du cône, il faut que $\overline{p_3}$ ait *la même valeur*, quel que soit le chemin suivi.

C'est pourquoi $\overline{p_3}$ ne contient aucun arbitraire, comme nous allons le reconnaître aisément.

Sur le *cône caractéristique* l'on a, en posant $\lambda^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$,

$$(1) \qquad \frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \frac{dx_3}{x_3} = \frac{d\lambda}{\lambda}.$$

D'ailleurs, les courbes caractéristiques (dans le sens primitif) de

$K = 0$ sont, en posant $\overline{p_3} = Z$,

$$(\text{II}) \qquad \frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \frac{dZ}{-\frac{1}{2}Z + \frac{x_3}{2}\left(\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)}.$$

Sur l'une de ces *courbes caractéristiques*, l'on a

$$x_3^2 = x_1^2 + x_2^2,$$

$$\frac{x_2}{x_1} = C,$$

de sorte que, tenant compte de (I), l'on peut écrire

$$\frac{x_3}{2}\left(\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x_2^2}\right) = \varphi(C, \lambda),$$

φ est *connu*.

Donc, sur la caractéristique fixée par la valeur de C, l'on a, d'après (I) et (II),

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{dZ}{-\frac{1}{2}Z + \varphi(C, \lambda)}.$$

Intégrons, en représentant par H une fonction arbitraire,

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left[H(C) + \int_0^\lambda \frac{\varphi(C, \lambda)}{\sqrt{\lambda}}\right].$$

Or, pour $\lambda = 0$, Z doit avoir *la même valeur*, quel que soit C.

Ceci exige $H = 0$.

Donc $Z = \overline{p_3}$ *ne renferme aucun arbitraire* (¹).

Il en serait de même pour $\overline{p_{33}}$, $\overline{p_{333}}$, etc.

Donc, on obtiendra une série formelle *unique* pour représenter l'intégrale de $\Lambda(u) = 0$.

Quant à la question de la *convergence* au voisinage du cône Ω, elle

---

(¹) Comparer avec la recherche analogue de M. Hadamard, dans ses *Leçons sur les ondes*, p. 297.

présente des difficultés et des particularités sur lesquelles je me réserve de revenir.

Pour l'instant, j'abandonne le point de vue « analytique » pour prendre le cas « général », où aucune donnée n'est taylorienne et où l'instrument de recherche sera naturellement, non plus la *série de puissances,* mais bien l'*intégrale de contour*.

Dérivation des intégrales simples à élément infini : Partie finie.

Soit l'intégrale définie

$$F(\alpha) = \int_A^B f(x, \alpha)\, dx.$$

Si A et B sont des fonctions de α *continues* ainsi que leurs dérivées premières, et si $f(x, \alpha)$ admet une dérivée par rapport à α *continue*, il est bien connu que l'on a

$$(1) \qquad \frac{dF}{d\alpha} = \int_A^B \frac{\partial f}{\partial \alpha}\, dx + f(B, \alpha)\frac{dB}{d\alpha} - f(A, \alpha)\frac{dA}{d\alpha}.$$

Dans son *Traité d'Analyse* (t. I, p. 43), M. Picard remarque que cette formule (1) ne serait pas applicable à la fonction

$$\Phi(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{dx}{\sqrt{x(\alpha - x)}}.$$

Il se présenterait « une différence n'ayant aucun sens, de *deux termes infinis* ».

Je voudrais présenter quelques réflexions au sujet de la dérivée de Φ.

Prenons plus généralement

$$(2) \qquad V(\alpha) = \int_0^\alpha f(x, \alpha)\frac{dx}{\sqrt{\alpha - x}}.$$

Nous supposons que $f(x, \alpha)$ admet des dérivées premières $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ déterminées et *continues* [1].

V est une fonction bien déterminée et continue. On peut donc faire le changement de variables

$$\alpha - x = \alpha(1 - y),$$

et V devient V_1 :

$$V_1(\alpha) = \int_0^1 f(\alpha y, \alpha)\sqrt{\alpha}\frac{dy}{\sqrt{1-y}}.$$

Considérons d'ailleurs l'intégrale

$$W_1(\alpha) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \alpha}\left[f(\alpha y, \alpha)\sqrt{\alpha}\right]\frac{dy}{\sqrt{1-y}}.$$

D'après les hypothèses faites, les intégrales V_1 et W_1 *convergent uniformément*, d'où

$$W_1 = \frac{dV_1}{d\alpha}.$$

Mais l'on peut écrire

$$W_1 = \lim_{h=0}\left[\int_0^{1-h}\frac{\partial}{\partial \alpha}(f\sqrt{\alpha})\frac{dy}{\sqrt{1-y}}\right].$$

Posons

$$J_h = \int_0^{1-h} f\sqrt{\alpha}\frac{dy}{\sqrt{1-y}}.$$

On a

$$W_1 = \lim_{h=0}\left(\frac{\partial}{\partial \alpha}J_h\right).$$

Cette limite *existe certainement*, comme on le verrait en faisant

---

[1] C'est M. de La Vallée-Poussin qui m'a fait observer que cette hypothèse *suffisait*. Je l'en remercie très vivement. *Voir*, sur ces questions, son Mémoire des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1892, et son très remarquable *Cours d'Analyse*, t. II, p. 95 et suivantes. *Voir* aussi le *Cours d'Analyse* de M. Jordan et celui de M. Goursat.

dans W_1 le changement

$$1 - y = z^2.$$

Donc enfin

$$(3) \qquad \frac{dV}{d\alpha} = \lim_{h=0} \left[\frac{\partial}{\partial\alpha} \int_0^{\alpha(1-h)} f(x, \alpha) \frac{dx}{\sqrt{\alpha - x}} \right].$$

C'est-à-dire que nous avons le droit *d'intervertir l'ordre* des deux opérations de *passage à la limite*. Voilà la remarque essentielle.

Mais, en dérivant J_h, intégrale ci-dessus, où h est *fini* pour l'instant, nous pouvons employer la formule (1) :

$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial\alpha} J_h = \int_0^{\alpha(1-h)} \frac{\partial}{\partial\alpha} \frac{f(x, \alpha)}{\sqrt{\alpha - x}} dx + \frac{f[\alpha(1-h), \alpha]}{\sqrt{h}\sqrt{\alpha}} \frac{d}{d\alpha}[\alpha(1-h)].$$

Cette expression (4) renferme deux termes qui *croissent indéfiniment* lorsque h tend vers zéro, mais dont *la somme est finie*, quelque petit que soit h. Nous le savons d'avance, par le changement de variables ; vérifions-le :

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} \frac{f(x, \alpha)}{\sqrt{\alpha - x}} = \frac{\partial f}{\partial\alpha} \frac{1}{\sqrt{\alpha - x}} - f \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{\alpha - x}},$$

puisque

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} \frac{1}{\sqrt{\alpha - x}} = - \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{\alpha - x}}.$$

Alors

$$\int_0^{\alpha(1-h)} \frac{\partial}{\partial\alpha} \frac{f(x, \alpha)}{\sqrt{\alpha - x}} dx = \int_0^{\alpha(1-h)} \left[\frac{\partial f}{\partial\alpha} \frac{dx}{\sqrt{\alpha - x}} - f \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha - x}} \right) dx \right].$$

La première intégrale sera *finie*, d'après nos hypothèses. La deuxième intégrale donne

$$- \left(\frac{f(x, \alpha)}{\sqrt{\alpha - x}} \right)_0^{\alpha(1-h)} + \int_0^{\alpha(1-h)} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{\sqrt{\alpha - x}}.$$

Ici encore l'intégrale est *finie*. Donc

$$\frac{\partial J_h}{\partial\alpha} = \text{partie finie} + \frac{f[\alpha(1-h), \alpha]}{\sqrt{h}\sqrt{\alpha}} (1-h) - \frac{f[\alpha(1-h), \alpha]}{\sqrt{h}\sqrt{\alpha}}.$$

Il est clair que *les deux termes en* $\frac{1}{\sqrt{h}}$ *devenant chacun infini pour* $h = 0$ *ont une somme finie, quelque petit que soit* h, puisque la somme contient un facteur $\sqrt{h}$.

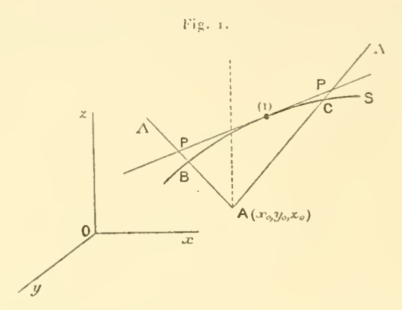
Il est utile de se servir de ces *parties finies*, plutôt que de mettre la dérivée sous forme *immédiatement finie*, ainsi qu'on va le reconnaître.

Équation des ondes. Synthèse de la solution.

Étude de l'intégrale au voisinage d'une frontière quelconque. — La frontière S est soumise, on le sait, à quelques restrictions. En particulier, elle n'est pas une surface formée de droites β, cas qui sera examiné ensuite.

Soit un point (1) sur S où la valeur donnée de $\overline{u}$ est u_1. Nous vou-

Fig. 1.



lons montrer que, si le point A tend à prendre la position (1), la valeur de l'intégrale en A tend vers u_1.

L'on a, l'intégration étant étendue à l'aire BC sur S :

Donc

$$2\pi u(x_0, y_0, z_0) = J_2 + J_1$$

en posant

$$J_2 = \iint \frac{du}{dN} \frac{d\sigma}{\sqrt{(z - z_0)^2 - r^2}},$$

$$J_1 = \frac{\partial}{\partial z_0}\left(\iint u \frac{dN}{dN} d\sigma\right) = \frac{\partial}{\partial z_0}\left[\iint u_1 \frac{dN}{\partial N} d\sigma + \iint (u - u_1) \frac{dN}{dN} d\sigma\right],$$

on a immédiatement

$$2\pi u_1 = \frac{\partial}{\partial z_0}\left[\int\int (u_1)\frac{dV}{dN}\,d\sigma\right].$$

Nous allons donc prouver que J_2 d'une part, et d'autre part

$$J_3 = \frac{\partial}{\partial z_0}\left[\int\int (u - u_1)\frac{dV}{dN}\,d\sigma\right],$$

tendent vers zéro, lorsque A tend vers (1).

Pour J_2, c'est extrêmement facile.

Posons, r étant, bien entendu, la distance polaire au point A; n la normale :

$$R = \sqrt{(z - z_0)^2 - r^2},$$

$$\Gamma = \cos(n, z) + \frac{z - z_0}{r}\cos(n, r);$$

l'on a

$$\frac{dV}{dN} = \frac{\Gamma}{R}.$$

Comme $\cos(n, z)$ est indépendant de z_0, comme $\cos(n, r)$ et $(\overline{u} - \overline{u}_1)$ d'ailleurs, il nous suffit de montrer que J_4 et J_5 sont *finis :*

$$J_4 = \frac{\partial}{\partial z_0}\left(\int\int\frac{dx\,dy}{R}\right),$$

$$J_5 = \frac{\partial}{\partial z_0}\left(\int\int\frac{z - z_0}{r}\frac{dx\,dy}{R}\right),$$

ces deux intégrales étant étendues à l'aire B′C′, projection de BC sur le plan (x, y).

Nous appliquons le théorème de la moyenne, en conservant, sous le signe d'intégration, des éléments de *signe constant*, de sorte que J_4 et J_5 se présentent multipliés par un facteur :

Valeur moyenne de $(u - u_1)$,

lequel tend vers zéro quand A tend vers (1).

Pour étudier J_4 et J_5, prenons des coordonnées polaires avec le pôle A, r et θ.

Nous avons à dériver une intégrale simple, puis à intégrer par rapport à θ entre les limites fixes o, 2π.

Soit l'équation du plan tangent en (1) à la frontière

$$z - z_0 = mr + q.$$

Le plan tangent étant incliné sur xOy de moins de 45°, on a

$$|m| < 1.$$

L'équation de la frontière elle-même sera

$$z - z_0 = mr + q + \varepsilon.$$

Si A tend vers (1), q devient infiniment petit et ε devient infiniment petit d'ordre supérieur, d'après la propriété du plan tangent.

Nous avons alors à dériver, par rapport à z_0, une intégrale de la forme

$$H = \int_0^B f(r, z_0) \frac{dr}{\sqrt{B - r}}.$$

B est la valeur limite de r qui annule R. (B, comme q, dépend de z_0.)

D'après ce qui précède, quelque petit que soit q, la dérivée, par rapport à z_0, de H est *finie*.

La convergence est démontrée.

Étude de l'intégrale au voisinage d'une frontière caractéristique. — L'on voit aussitôt que la question est infiniment plus difficile. La surface frontière S est devenue un cône Ω, formé de droites β.

Soit un point (1) de la surface du cône. Si A tend vers (1) l'aire découpée par le cône de A, formé de droites β, l'aire analogue de BC ne devient plus infiniment petite dans tous les sens.

L'on ne peut plus aller aussi vite que précédemment.

On ne peut plus prendre A pour origine des coordonnées polaires.

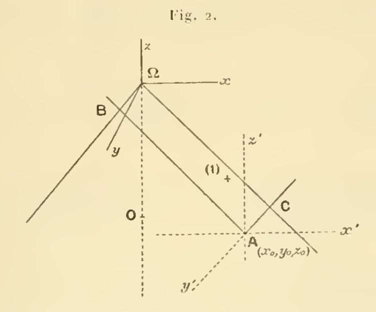
Il faut, non plus faire des applications rapides du théorème de la moyenne, mais faire certains calculs jusqu'au bout.

Il n'y a aucun intérêt à examiner l'expression

$$\iint \frac{du}{dN} \frac{d\sigma}{\sqrt{(z-z_0)^2 - r^2}} + \frac{\partial}{\partial z_0} \left[\iint (u - u_1) \frac{dN}{dN} d\sigma \right].$$

Mais, grâce à la forme simple de la frontière, en prenant pour ori-

Fig. 2.



gine des coordonnées polaires le point O intersection de l'axe du cône avec le plan horizontal de A, l'on arrive à calculer u avec assez d'approximation pour montrer que $u(x_0, y_0, z_0)$ tend vers $\overline{u_1}$,

valeur donnée au point (1),

lorsque A s'approche de (1).

Il se présente des *parties finies* d'intégrales simples tout à fait pareilles à celles que nous venons de rencontrer. Je me permettrai de renvoyer le lecteur à un Mémoire inséré dans les *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo* (février 1905), où la discussion est complètement achevée.

Dérivation des intégrales triples à élément infini : partie finie.

Soit à dériver l'intégrale

$$(1) \qquad \mathrm{I} = \int\!\!\int_{\mathrm{W}}\!\!\int_{\lambda} \varphi(x, y, z)\,dx\,dy\,dz;$$

le champ d'intégration W, comme φ, dépend d'un paramètre λ.

L'on a, K étant fini et ε une quantité infiniment petite par rapport à $\Delta\lambda$,

$$(2) \quad \Delta\mathrm{I} = \int\!\!\int_{(\mathrm{W})}\!\!\int \Big[\underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\Delta\lambda}_{(\mathrm{I})} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial\mathrm{X}}(\varphi\xi) + \frac{\partial}{\partial\mathrm{Y}}(\varphi\eta) + \frac{\partial}{\partial\mathrm{Z}}(\varphi\zeta)}_{(\mathrm{II})}\Big]d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}\,d\mathrm{Z} + \mathrm{K}\varepsilon.$$

L'on verra, dans le Mémoire précédent, comment cette formule est établie et pourquoi un point (x, y, z) de W est devenu ici $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})$. Nous rétablirons la notation (x, y, z) dans $\Delta\mathrm{I}$ et nous allons mieux utiliser la formule (2) en la prenant sous deux formes différentes.

Dans l'intégrale figurent les termes (I) et (II). Pour ces derniers l'intégrale *triple* peut être changée en intégrale *de surface*. Il faut tantôt faire la transformation et tantôt garder l'intégrale triple, si l'on veut user facilement de la formule.

C'est là une remarque essentielle.

Précisons la question.

Soit W le volume ABC,

$$\varphi = \mathrm{F}(x, y, z)\,\mathrm{G}(x, y, z, x_0, y_0, z_0);$$

λ est l'un des paramètres x_0, y_0, z_0.

Dérivée par rapport à z_0. — Le volume W est ABC.

Le volume $\mathrm{W} + \Delta\mathrm{W}$ est A'B'C'.

Intégrons par parties le terme (II). Décomposons l'aire du cône ABC en deux parties par un cylindre vertical de base B'C'.

Pour l'*aire* AB″C″ les formules de transformation sont :

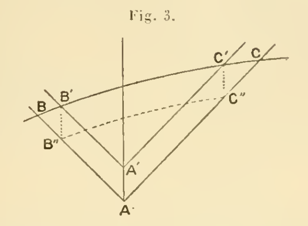
$$\zeta = \Delta z_0, \qquad \xi = 0, \qquad \eta = 0.$$

Pour l'*aire* B'C' qui fait partie de BC

$$\zeta = 0 = \xi = \eta.$$

Enfin, les *aires* BB''CC'' du cône et BB'CC' de la frontière, à la

Fig. 3.



limite, lorsque Δz_0 tend vers zéro, donneront des termes nuls. Il est inutile de calculer les ξ, η, ζ.

Donc

$$(3) \qquad \Delta I = \Delta z_0 \left(\iiint_{\text{vol. ABC}} \frac{\partial \varphi}{\partial z_0} d\tau + \iint_{\text{cône ABC}} \varphi \, dx \, dy + \varepsilon \right).$$

Ceci ne souffre aucune difficulté, si φ et sa dérivée sont *finis*. Mais nous avons, précisément, à employer des fonctions φ qui sont infinies sur le cône ABC.

Conservons donc la forme primitive

$$(4) \qquad \Delta I = \iiint_{\text{vol. ABC}} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial z_0} \Delta z_0 + \frac{\partial}{\partial z} (\varphi \zeta) \right] d\tau + K \varepsilon.$$

ζ reste indéterminé dans le volume, mais sur le contour l'on a, sur le cône ABC :

$$\zeta = \Delta z_0 ;$$

sur l'aire BC :

$$\zeta = 0.$$

Prenons l'expression de φ. F reste fini, G sera supposée finie, ainsi

que sa dérivée et telle que l'on ait

$$\frac{\partial G}{\partial z_0} = -\frac{\partial G}{\partial z};$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial z_0}(FG) = G\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}(FG);$$

d'où

$$\iiint_{\text{vol. ABC}} \frac{\partial \varphi}{\partial z_0} d\tau = \iiint_{\text{vol. ABC}} G\frac{\partial F}{\partial z} d\tau - \iint_{\text{cône ABC + aire BC}} FG\, dx\, dy.$$

Cette formule est correcte, les intégrales ayant un sens bien déterminé.

D'autre part

$$\frac{1}{\Delta z_0}\iiint_{\text{vol. ABC}} \frac{\partial}{\partial z}(\varphi\zeta)\, d\tau = \iint_{\text{cône ABC}} FG\, dx\, dy;$$

d'où

$$(5) \qquad \frac{\partial I}{\partial z_0} = \iiint_{\text{vol. ABC}} G\frac{\partial F}{\partial z} d\tau - \iint_{\text{aire BC}} FG\, dx\, dy.$$

Supposons maintenant que G devienne infini comme $\frac{1}{R}$ sur le cône ABC, les deux intégrales ci-dessus ont un sens. Elles convergent uniformément lorsque l'on remplace ABC par une surface voisine et que, d'une manière quelconque, cette surface tend vers la position limite fixe ABC.

Donc les intégrales (1), d'une part, (4) et (5), d'autre part, convergent uniformément.

Donc (5) représente encore la dérivée de (1) quand G est infini comme $\frac{1}{R}$, F et ses dérivées étant finis.

A cause de la convergence uniforme, comme dans le cas des intégrales simples, *nous pouvons intervertir les deux opérations de passage à la limite* et dire : w étant un volume intérieur à W et tendant vers W, ou : *abc* tendant vers ABC, l'on a

$$\frac{\partial}{\partial z_0}\left(\lim \iiint_w\right) = \lim\left(\frac{\partial}{\partial z_0}\iiint_w\right).$$

Mais cette dérivée de l'intégrale du second membre, nous la prendrons sous la forme (3).

Nous pouvons donc écrire, en toute rigueur, puisque nous avons montré que la limite existe,

$$\frac{\partial I}{\partial z_0} = \lim \left(\iiint_{\text{vol. } abc} \frac{\partial \varphi}{\partial z_0} d\tau + \iint_{\text{aire } abc} \varphi \, dx \, dy \right). \tag{6}$$

La dérivée est la limite de la somme de deux termes infinis.

Je l'appelais, dans ma Thèse, *la partie finie* de l'intégrale infinie.

L'on pourrait écrire

$$\text{partie finie} \left(\iiint_{\text{vol. ABC}} \frac{\partial \varphi}{\partial z_0} d\tau \right).$$

M. Hadamard emploie la même expression.

Indépendamment l'un de l'autre, nous avons reconnu le rôle de ces *parties finies* (1).

De même les dérivées de (1) par rapport à x_0 ou y_0 prennent soit la forme (5), soit la forme (6) à volonté.

Le raisonnement est identique.

Équation des ondes. Vérification de la solution.

Rappelons les résultats obtenus :

Soit A : (x_0, y_0, z_0), soient

$$z' = z - z_0, \qquad x' = x - x_0, \qquad y' = y - y_0,$$
$$r^2 = x'^2 + y'^2 ;$$
$$V = \log \left[\frac{z'}{r} + \sqrt{\left(\frac{z'}{r}\right)^2 - 1} \right],$$

---

(1) J. Hadamard, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* décembre 1903, et R. d'Adhémar, *Thèse* déposée à la Sorbonne en décembre 1903, soutenue en avril 1904 ; ensuite : J. Hadamard, *Verhandlungen der Mathematiker Kongresses,* Teubner, 1905, et R. d'Adhémar, *Circolo matematico di Palermo,* 1905.

V est bien *nulle* sur le cône A, qui a pour équation

$$\frac{z'}{r} = 1.$$

V est *infini* sur la verticale du point A et *indéterminé* au voisinage de ce point.

L'intégrale est donnée par la formule

$$2\pi u(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial J_A}{\partial z_0},$$

si l'on convient d'écrire

$$J_A = \iiint_{(ABC)} F(x, y, z) V_A \, d\tau.$$

J'affecte la lettre V de l'indice A pour bien montrer que la fonction auxiliaire V varie avec le point A (x_0, y_0, z_0).

L'on a aussitôt la valeur de u, mais les difficultés se présentent pour ses *dérivées*.

Expression de $u(x_0, y_0, z_0)$. — Posons $\varphi = FV_A$, φ étant *nul* sur le cône, nous avons de suite

$$2\pi u(x_0, y_0, z_0) = \iiint_{(ABC)} F \frac{\partial V_A}{\partial z_0} d\tau,$$

$$\frac{\partial V}{\partial z_0} = G = \frac{-1}{\sqrt{(z-z_0)^2 - r^2}} = \frac{-1}{R}.$$

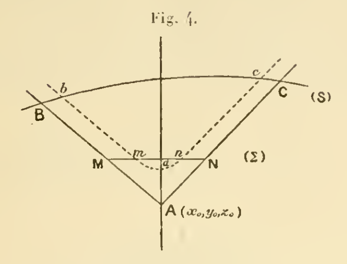
Comme, en A, V devient indéterminé, infini dans une direction et G aussi infini sur les génératrices du cône, nous devons ici séparer le volume d'intégration en deux parties par un plan horizontal MN.

Appelant W le volume AMN ou le volume BCMN, nous appelons toujours w le volume *amn* ou *bcmn* qui a W pour *limite*. Nous appelons S la frontière donnée, Σ le plan MN et Λ la surface du cône de sommet A.

Suivant les cas, Λ représentera l'aire MBNC ou l'aire AMN.

On représentera par λ les aires relatives à la surface (pointillée) voisine du cône.

Fig. 4.



On représentera par s et σ les aires qui ont S et Σ pour limites, par $[s]$ et $[\sigma]$ les contours des aires s et σ.

Dérivées relatives au volume BCMN. — D'après ce qui précède l'on a, en appelant u' la portion de $u(x_0, y_0, z_0)$ qui correspond à ce volume,

$$2\pi \frac{\partial u'}{\partial z_0} = \lim \left[\iiint_{(w)} \frac{\partial}{\partial z_0}\left(\mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z_0}\right) d\tau + \iint_{(\lambda)} \mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z_0} \right] dx\, dy$$

ou, sous forme *immédiatement finie*,

$$= \iiint_{\mathrm{W}} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z} \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z_0} d\tau - \iint_{\mathrm{S}+\Sigma} \mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z_0} dx\, dy$$

(avec une convention relative au signe de $dx\, dy$),

$$= \mathrm{J}_1 + \mathrm{J}_2.$$

Ces deux nouvelles intégrales sont dérivables, de même

$$(\alpha) \qquad \frac{\partial \mathrm{J}_1}{\partial z_0} = \lim \left(\iiint_{w} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z} \frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial z_0^2} d\tau + \iint_{\lambda} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z} \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z_0} dx\, dy \right),$$

$$(\beta) \qquad = \iiint_{\mathrm{W}} \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial z^2} \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z_0} d\tau - \iint_{\mathrm{S}+\Sigma} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z} \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z_0} dx\, dy,$$

$$(\gamma) \qquad \frac{\partial \mathrm{J}_2}{\partial z_0} = \lim \left(-\iint_{s+\sigma} \mathrm{F}\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial z_0^2} dx\, dy - \int_{[s+\sigma]} \mathrm{F}_1 \frac{\partial \mathrm{V}}{dz_0} dl \right).$$

On peut encore l'écrire sous forme *immédiatement finie* (δ).

Mais la présence, dans la formule (α), de $\frac{\partial F}{\partial z}$ nous embarrasse, et il faut grouper les termes de (α) et (γ). Nous en avons le droit, puisque nous avons les expressions bien déterminées équivalentes (β) et (δ). Remarquons que

$$\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial G}{\partial z_0} = \frac{\partial}{\partial z}\left(F\frac{\partial G}{\partial z_0}\right) + F\frac{\partial^2 G}{\partial z_0^2}.$$

En intégrant dans w, l'on a :

1°
$$\int\int\int_w F\frac{\partial^2 G}{\partial z_0^2}d\tau;$$

2° Une intégrale appliquée à $S + \Sigma$ qui détruit la première intégrale de (γ);

3° Une intégrale appliquée à λ *à élément partout infini*.

Ce dernier terme s'ajoute à la deuxième intégrale de (α) et à la deuxième intégrale de (γ), qui sont de même nature.

Nous avons donc le droit d'écrire

$$\frac{\partial(J_1 + J_2)}{\partial z_0} = \text{partie finie}\left(\int\int\int_W F\frac{\partial^2 G}{\partial z_0^2}d\tau\right).$$

Ceci, sous forme immédiatement finie, étant donné par (β) et (δ).

Dérivées relatives au volume AMN. — A cause des particularités de V et G au point A, nous ne pouvons ici parler de « partie finie ». Nous prendrons les dérivées, sous la forme *immédiatement finie*, d'après (β) et (δ).

Elles sont parfaitement déterminées, cela est immédiat.

Bien entendu, l'on obtient de la même façon les dérivées

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y_0^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z_0^2}.$$

Nous pouvons maintenant, en établissant deux théorèmes, vérifier que l'on a bien $\Delta(u) = F$, les données étant nulles, à la frontière.

Appelons toujours u' et u'' les parties de $u(x_0, y_0, z_0)$ correspondant aux deux volumes BCMN, AMN.

Théorème I. — *Quel que soit le plan* MN *au-dessus de* A, *l'on a*

$$A(u') = 0.$$

En effet, nous avons, pour $A(u')$, trois parties correspondant aux trois variables : $2\pi A(u') = X + Y - Z$.

$$X = \text{partie finie}\left(\int\int\int F \frac{\partial^2 G}{\partial x_0^2} d\tau\right)$$

ou, sous forme immédiatement finie, d'après (β) et (δ),

$$X = B,$$

$$Y = \text{partie finie}\left(\int\int\int F \frac{\partial^2 G}{\partial y_0^2} d\tau\right),$$

et, sous forme immédiatement finie, d'après (β) et (δ),

$$Y = B',$$

$$Z = \text{partie finie}\left(\int\int\int F \frac{\partial^2 G}{\partial z_0^2} d\tau\right),$$

et de même

$$Z = B''.$$

Donc $2\pi A(u') = B + B' - B''$ sous forme immédiatement finie.

Cette quantité étant parfaitement déterminée, nous pouvons l'écrire

$$2\pi A(u') = \text{partie finie}\left[\int\int\int F A(G) d\tau\right].$$

Comme dans tout volume *bcmn*, et même dans BCMN, l'on a

$$A(G) = 0,$$

nous pouvons en conclure

$$2\pi A(u') = 0$$

par le raisonnement suivant :

$$\iiint_w \mathrm{F}\frac{\partial^2 \mathrm{G}}{\partial z_0^2}\,d\tau = \mathrm{B}_1'' + \mathrm{L}_1'',$$

B_1'' devenant B'', *la partie finie*, quand w devient W et, dans ces conditions, L_1'' *croissant indéfiniment*, puisque pour le volume W l'intégrale n'a pas de sens.

D'autre part, la dérivée $2\pi\frac{\partial^2 u}{\partial z_0^2}$ s'obtient en ajoutant à l'intégrale triple une intégrale de contour dont l'élément *croît indéfiniment* quand w devient W, mais qui reste constamment égale à

$$-\mathrm{L}_1'' + \varepsilon_1'',$$

ε_1'' tendant vers zéro quand w devient W.

Donc

$$\begin{aligned}2\pi\frac{\partial^2 u'}{\partial z_0^2} &= \lim\left(\iiint_w \mathrm{F}\frac{\partial^2 \mathrm{G}}{\partial z_0^2}\,d\tau - \mathrm{L}_1 + \varepsilon_1\right)\\ &= \lim(\mathrm{B}_1'' + \varepsilon_1'') = \mathrm{B}'',\end{aligned}$$

et l'on a les équations analogues pour les autres dérivées secondes de u'.

D'où

$$\begin{aligned}2\pi\,\Delta(u') = \lim\Big[&\iiint_w \mathrm{F}\,\Delta(\mathrm{G})\,d\tau\\ &- (\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_1' - \mathrm{L}_1'') + (\varepsilon_1 + \varepsilon_1' - \varepsilon_1'')\Big].\end{aligned}$$

Maintenant l'intégrale triple *n'augmente plus* quand w devient W ; elle reste *identiquement nulle*.

Le terme $(\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_1' - \mathrm{L}_1'')$, qui *détruit toujours l'accroissement* de l'intégrale dans ces conditions, est donc ici *identiquement nul*.

Donc

$$2\pi\,\Delta(u') = \lim(\varepsilon_1 + \varepsilon_1' - \varepsilon_1'') = 0.$$

L'avantage de la considération des *parties finies* est donc clair, car

la démonstration directe de l'égalité

$$B + B' - B'' = 0$$

serait très difficile. Précisons davantage :

La surface λ a pour équation $R = \varepsilon$.

Les dérivées immédiatement finies B, B', B'' sont les limites, pour $\varepsilon = 0$, des dérivées B_1, B'_1, B''_1 relatives à *bcmn*. Les *parties infinies* de nos intégrales sont, d'après les formules (α) et (γ), de la forme

$$\frac{p_1(\varepsilon)}{\varepsilon} + \frac{q_1(\varepsilon)}{\varepsilon^3}.$$

C'est-à-dire que l'on doit avoir

$$\iiint_w F\,A(G)\,\partial\tau = (B_1 + B'_1 - B''_1) + \frac{P_1(\varepsilon)}{\varepsilon} + \frac{Q_1(\varepsilon)}{\varepsilon^3}.$$

Or, le premier membre est *nul*, quel que soit ε. Donc, quel que soit ε et même pour $\varepsilon = 0$, l'on a

$$P_1 \equiv 0 \equiv Q_1 \equiv (B_1 + B'_1 - B''_1).$$

C'est-à-dire l'on a

$$B + B' - B'' = 0$$

ou

$$A(u') = 0.$$

Étudions maintenant la seconde partie u'' de $u(x_0, y_0, z_0)$.

Théorème II. — *Quel que soit le volume* AMN, *l'on a*

$$2\pi A[u''(x_0, y_0, z_0)] = 2\pi F(x_0, y_0, z_0).$$

Nous ne devons plus parler de parties finies des intégrales triples. Mais ici, à cause de la forme du champ, l'on a, sous forme immédiatement finie,

$$2\pi \frac{\partial^2 u''}{\partial x_0^2} = \iiint_{AMN} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} G\,d\tau,$$

$$2\pi \frac{\partial^2 u''}{\partial y_0^2} = \iiint_{AMN} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} G\,d\tau.$$

Ces deux intégrales tendent vers zéro avec le volume AMN.

De même

$$2\pi \frac{\partial^2 u''}{\partial z_0^2} = \int\int\int_{\text{AMN}} \frac{\partial^2 \text{F}}{\partial z^2} \text{G}\, dz$$
$$- \int\int_{\text{MN}} \frac{\partial \text{F}}{\partial z} \text{G}\, dx\, dy - \frac{\partial}{\partial z_0}\left(\int\int_{\text{MN}} \text{FG}\, dx\, dy\right).$$

Les deux premiers termes tendent vers zéro avec le volume AMN.

Nous savons étudier le dernier, grâce aux parties finies des intégrales simples. Ce terme sera

$$\int_0^{2\pi} d\theta \left(\frac{\partial}{\partial z_0} \int_0^{\text{B}} \text{F} \frac{r\, dr}{\sqrt{\text{B}^2 - r^2}}\right),$$

$\text{B} = \text{H} - z_0$, H étant la cote du plan MN.

Formons

$$\frac{\partial}{\partial \text{B}} = - \frac{\partial}{\partial z_0};$$

$$\frac{\partial}{\partial \text{B}} \int_0^{\text{B}} \text{F} \frac{r\, dr}{\sqrt{\text{B}^2 - r^2}} = \quad \text{partie finie} \left(\int_0^{\text{B}} \text{F} \frac{\partial}{\partial \text{B}} \frac{1}{\sqrt{\text{B}^2 - r^2}} r\, dr\right)$$
$$= - \text{partie finie} \left(\int_0^{\text{B}} \text{FB} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\sqrt{\text{B}^2 - r^2}} dr\right).$$
$$= - \text{partie finie} \left[\left(\frac{\text{FB}}{\sqrt{\text{B}^2 - r^2}}\right)_0^{\text{B}} - \int_0^{\text{B}} \frac{1}{\sqrt{\text{B}^2 - r^2}} \text{B} \frac{\partial \text{F}}{\partial r} dr\right]$$
$$= + (\text{F})_{\text{MN}} + \int_0^{\text{B}} \frac{1}{\sqrt{\text{B}^2 - r^2}} \text{B} \frac{\partial \text{F}}{\partial r} dr.$$

Le second terme tend vers *zéro* avec B.

Le premier doit être intégré avec son signe, car on doit prendre

$$- \frac{\partial}{\partial \text{B}}$$

et puis l'on a

$$- \frac{\partial^2}{\partial z_0^2} \text{ dans le symbole } \Lambda.$$

Il donne donc

$$2\pi(F)_{MN}$$

$(F)_{MN}$ étant la valeur de F au centre de l'aire MN.

Passant à la limite, en faisant tendre B vers zéro, l'on a

$$2\pi A[u''(x_0, y_0, z_0)] = 2\pi F(x_0, y_0, z_0),$$

ce qui donne la vérification cherchée.

Il était, d'ailleurs, à prévoir que le seul volume infiniment voisin du point A devait entrer en jeu dans cette étude.

Conclusion. — Je ne saurais omettre de renvoyer le lecteur à un remarquable Mémoire de M. Hadamard, inséré dans les *Annales de l'École Normale* (mars 1905).

Non seulement M. Hadamard a remarquablement rapproché, d'une certaine manière, les équations des types *elliptique* et *hyperbolique*, mais encore il a assez sensiblement modifié la belle méthode de M. Volterra pour l'étendre à des équations à coefficients variables, dans le domaine *analytique*.

La principale conclusion que je tirerais des travaux actuels concernant les *équations hyperboliques*, c'est que l'on est naturellement amené, par des dérivations, à ces *parties finies d'intégrales infinies*.

L'on devra parler de ces parties finies tant que l'on n'aura pas obtenu un mode d'intégration *radicalement différent* de celui de M. Volterra. Et il sera prudent d'avoir constamment sous les yeux les expressions *immédiatement finies* correspondantes.

Sur les points dicritiques;

PAR M. H. DULAC,

Professeur adjoint à la Faculté des Sciences de Grenoble.

---

1. L'étude des intégrales d'une équation différentielle

$$X(x, y)\frac{dx}{dy} = Y(x, y)$$

dans le voisinage de $x = 0$, $y = 0$ supposé point multiple des courbes $X = 0$, $Y = 0$ peut toujours être faite complètement, *dans le champ réel,* ainsi que l'a montré M. Bendixson. Mais l'étude de ces mêmes intégrales, *dans le champ complexe,* n'a donné jusqu'ici que peu de résultats précis, si l'on en excepte la recherche des intégrales algébroïdes pour $x = 0$, problème complètement résolu. Si j'ai pu montrer (1) qu'il y a, dans la plupart des cas, une infinité d'intégrales pour lesquelles y tend vers 0 avec x, ces intégrales présentent des singularités très diverses, qu'il paraît difficile d'étudier. En général, étant données des conditions initiales, x_0, y_0, aussi voisines que l'on veut de $x = 0$, $y = 0$, on ne sait comment se comporte l'intégrale relative à ces valeurs initiales, lorsque x tend vers 0. On ne sait si cette intégrale possède un nombre fini ou non de points critiques, dans le voisinage

(1) *Journal de l'École Polytechnique*, IXe Cahier, 1904; *Annales de l'Université de Grenoble,* t. XVII, 1905.

de $x=0$. Dans le cas particulier où x est en facteur dans A, aucun théorème général ne permet d'affirmer que y tend vers une limite lorsque x tend vers 0, et, en effet, y peut ne tendre vers aucune limite.

La difficulté de résoudre ces diverses questions, dans les cas les plus généraux, me paraît donner quelque intérêt aux résultats particuliers, mais très précis, que j'ai obtenus dans le cas d'un *point dicritique*.

Considérons l'équation

$$(1)\quad [xA(x,y)+\varphi_n(x,y)+\ldots]\frac{dy}{dx}=yA(x,y)-\psi_n(x,y)+\ldots$$

où les parenthèses ainsi que le second membre sont des développements suivant les puissances de x et y. Nous n'écrivons que les termes de moindre degré : A, φ_n, ψ_n, qui sont des polynomes homogènes, le premier de degré $n-2$, les autres de degré n.

Supposons qu'il n'y ait pas de valeur de x et y annulant à la fois

$$(1')\qquad A(x,y)\qquad \text{et}\qquad y\varphi_n(x,y)+x\psi_n(x,y).$$

1° *On peut trouver un nombre ε tel que, si l'on a* $|x_0|<\varepsilon$, $|y_0|<\varepsilon$, *l'intégrale de* (1) *correspondant aux conditions initiales x_0, y_0 est, pour $|x|<|x_0|$, ou bien holomorphe et tend vers* 0 *avec x, ou bien algébroïde et alors une au moins de ses déterminations tend vers* 0 *avec x.*

2° *Toutes les déterminations de l'intégrale considérée tendent vers* 0 *avec x, si x est en facteur dans le premier membre de* (1); *pour toute intégrale passant dans le voisinage de $x=0$, $y=0$, y tend vers* 0 *de quelque façon que x tende vers* 0.

Les seules intégrales pour lesquelles x et y tendent vers 0 sont les intégrales algébroïdes (holomorphes en général) pour $x=0$; l'existence de ces intégrales en nombre infini est bien connue, mais on ne s'était pas, à ma connaissance, occupé d'examiner si elles étaient les seules pour lesquelles y tende vers 0 avec x. De plus, 2° nous donne des conditions suffisantes pour que y tende vers 0 avec x; nous avons là un des exemples assez rares où, l'existence d'une limite pour y ne

résultant pas du théorème de M. Painlevé, l'existence de cette limite de y, lorsque x tend vers o, *en variant dans le champ complexe*, est établie sans que l'équation (1) soit intégrée.

Ces résultats peuvent subsister partiellement, même s'il y a des valeurs de x et y annulant les deux polynomes indiqués. Ainsi le résultat 2° subsiste, pourvu que $A(x, y)$ ne contienne pas x en facteur.

2. *Exemple des divers cas.* — Avant de démontrer les résultats énoncés, éclaircissons-les par quelques exemples. Considérons l'équation

$$(2) \qquad (x + \ldots)\frac{dy}{dx} = ay + \ldots,$$

où a est un *nombre positif*, et les deux membres contenant des développements suivant les puissances de x et y, les termes de moindre degré étant seuls écrits. Faisons, à propos de cette équation, quelques remarques mettant en évidence les diverses particularités qui se présentent pour les intégrales d'une équation, dans le voisinage d'un point dicritique.

Si x est en facteur dans le premier membre de (2), cette équation, pour x et y suffisamment petits, peut s'écrire

$$x\frac{dy}{dx} = ay + \ldots.$$

L'intégrale générale est donnée, pour x et y suffisamment petits, par

$$y + \varphi(x, y) = Cx^a$$

où C est une constante et φ un développement suivant les puissances de x et y, les termes de degré minimum étant du second degré. On en conclut facilement que, si les valeurs initiales x_0, y_0 sont suffisamment petites, y tendra vers o avec x, de quelque façon que x tende vers o. Il en est ainsi, en particulier, pour $a = 1$, cas d'un point dicritique; nous verrons qu'il en est ainsi dans le cas d'un point dicritique quelconque.

Citons comme exemples les équations

$$x\frac{dy}{dx} = y + \frac{k(q+1)}{p} y^{p+1} x^q,$$

$$x(2y + x + x^2)\frac{dy}{dx} = y(2y + x),$$

dont les intégrales sont respectivement données par

$$y^p(C - kx^{p+q}) = x^p, \qquad y(y + x + x^2) = Cx^2.$$

Si x n'est pas en facteur dans le premier membre de (2), nous ne pouvons dire que y tend vers o, lorsque x tend vers o d'une façon quelconque. En effet, l'équation (2) possède toujours une intégrale qui, pour $x = 0$, prend une valeur y_0, aussi petite que l'on veut, mais différente de o. Considérant cette intégrale, on voit que y ne tend pas vers o avec x. Si, d'autre part, nous employons les développements de M. Picard donnant les valeurs de x et y satisfaisant à l'équation, sous la forme de développements suivant les puissances de t et de Ct^a, C étant une constante arbitraire, nous voyons, en faisant tendre t vers o, qu'on peut faire tendre x vers o de telle façon que y tende aussi vers o. De ce qui précède il résulte que la limite vers laquelle tend y, lorsque x tend vers o, dépend, dans une certaine mesure, de la façon dont x tend vers o. Cette circonstance tient à ce que les intégrales de l'équation possèdent des points critiques, qui varient avec la constante d'intégration et qui peuvent devenir aussi voisins que l'on veut de l'origine (dans le plan des x). En effet, nous pouvons toujours prendre des valeurs x_1 et y_1, aussi petites que l'on veut, annulant le premier membre de (2), l'intégrale qui admet pour valeurs initiales x_1, y_1 a pour point critique $x = x_1$. Nous pouvons même démontrer, en employant les développements de M. Picard, que, si a n'est pas rationnel, certaines, au moins, des intégrales $y(x)$ de l'équation admettent une infinité de points critiques dans le voisinage de l'origine. Si a est rationnel ([1]), on peut trouver un nombre ε, tel que

([1]) Si a est un entier supérieur à 1, on sait que, pour que les développements

toute intégrale (relative a des valeurs initiales assez petites pour que les développements puissent être employés) n'ait pour $|x| < \varepsilon$ qu'un nombre fini de points critiques; autour de chacun de ces points se permutent un nombre fini de déterminations de y (en général 2 déterminations). Une telle intégrale de $y(x)$ est donc pour $|x| < \varepsilon$ une fonction algébroïde de x, dont une détermination au moins tend vers o avec x, ainsi que le montre une remarque précédente. C'est le théorème que nous avons énoncé pour un point dicritique.

Examinons, pour illustrer le cas dont nous venons de parler, un exemple très simple.

Prenons l'équation

$$(x+y^2)\frac{dy}{dx} = y,$$

dont l'intégrale générale est donnée par

$$x = 2Cy + y^2, \qquad y = -C \pm \sqrt{C^2 + x}.$$

Chaque intégrale admet le point critique $x = -C^2$.

Si nous considérons l'intégrale qui admet pour valeurs initiales x_0, y_0, nous aurons

$$C = \frac{x_0 - y_0^2}{2y_0}.$$

Pour avoir $y = y_0$, pour $x = x_0$ nous devons prendre la détermination du radical qui, pour $x = x_0$, est égale à $\frac{x_0 + y_0^2}{2y_0}$, soit α son argument. Pour que y tende vers o avec x, il faut prendre la détermination du radical qui, pour $x = 0$. est égale à $\frac{y_0^2 - x_0}{2y_0}$, soit β son argument. Nous pouvons toujours supposer α et β compris entre o et 2π. Si la différence $\alpha - \beta$ est inférieure à π en valeur absolue, nous devons, pour

de M. Picard existent, il faut qu'une condition soit vérifiée. On peut énoncer cette condition en disant qu'il faut qu'en recherchant une intégrale holomorphe de la forme $y = \varphi(x)$, on ne soit pas arrêté par une impossibilité dans le calcul du terme en x^a de $\varphi(x)$. Le théorème que nous énonçons n'est vrai que si les développements de M. Picard existent.

que y tende vers o avec x, faire tendre x vers o suivant un chemin partant de $x = x_0$ et tournant un nombre pair de fois autour du point critique $x = -C^2$; si la différence considérée est égale ou supérieure à π, en valeur absolue, nous devons tourner un nombre impair de fois autour du point critique. En particulier, si x_0 et y_0 sont réels, si l'on veut que y tende vers o, on devra tourner un nombre pair ou un nombre impair de fois autour du point critique suivant que $y_0^4 - x_0^2$ est positif ou négatif. Si x ne tend pas vers o de la façon indiquée, y ne tendra pas vers o (à moins que l'on ait $y_0^2 = x_0$).

On pourrait étudier de même l'équation dont l'intégrale générale est donnée par

$$(x+y)(x+y+y^2) = Cy^2.$$

Il est très facile de trouver des équations appartenant au type (2) et dont on ait l'intégrale générale.

Formons l'équation qui admet pour intégrale générale

$$[\varphi_1(x,y)]^{\lambda_1}[\varphi_2(x,y)]^{\lambda_2}\ldots[\varphi_n(x,y)]^{\lambda_n} = C,$$

où les φ sont des développements suivant les puissances de x et y contenant des termes du premier degré. Si la somme $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$ est nulle, l'équation obtenue sera de la forme considérée.

Supposons que dans (1) le premier et le second membre soient réduits aux termes écrits, explicitement, on vérifie immédiatement qu'en posant $y = tx$, on obtient une équation qu'on sait intégrer.

Je remarquerai toutefois que la vérification des théorèmes que nous avons énoncés sera parfois difficile à faire au moyen des intégrales générales que nous pouvons ainsi obtenir.

Ces exemples cités, abordons l'étude de l'équation (1).

5. *Directions singulières.* — Faisons le changement de variable

$$y = tx;$$

l'équation

$$(3)\quad [x\,A(x,y) + \varphi_n(x,y) + \ldots]\frac{dy}{dx} = x\,A(x,y) - \psi_n(x,y) - \ldots$$

devient

$$(4) \quad [A(1,t) + x\varphi_n(1,t) + \ldots]\,dt + [t\varphi_n(1,t) + \psi_n(1,t) + \ldots]\,dx = 0,$$

les quantités entre crochets étant des développements suivant les puissances de x, dont les coefficients sont des polynomes en t. De même, si l'on fait le changement de variable

$$x = uy,$$

on obtient l'équation

$$(5) \quad [-A(u,1) + y\psi_n(u,1) + \ldots]\,du + [\varphi_n(u,1) + u\psi_n(u,1) + \ldots]\,dy = 0.$$

Si les deux termes de l'équation (3) sont holomorphes pour $|x| < a$ et $|y| < b$, les deux termes de l'équation (4) seront des développements convergents pour tous les couples de valeurs de x et de t, tels que l'on ait à la fois $|x| < a$, $|tx| < b$. Une remarque analogue s'applique à (5).

Nous dirons que le point dicritique $x = 0$, $y = 0$, de l'équation (3), ne présente pas de *directions singulières*, s'il n'existe pas de valeurs de t annulant à la fois, dans (4),

$$A(1,t) \quad \text{et} \quad t\varphi_n(1,t) + \psi_n(1,t),$$

et si, de plus, on n'a pas, dans (5),

$$A(0,1) = 0 \qquad \text{et} \qquad \varphi_n(0,1) = 0.$$

On voit que ceci revient à dire qu'il n'y a pas de valeurs de x et y annulant à la fois

$$A(x,y) \quad \text{et} \quad y\varphi_n(x,y) + x\psi_n(x,y).$$

4. *Indication du problème traité.* — S'il n'y a pas de directions singulières, ce qui est le cas général, il y a, étant donnée une direction quelconque $\frac{y}{x} = t_1$, une intégrale et une seule pour laquelle x et y tendent simultanément vers zéro, $\frac{y}{x}$ tendant vers t_1. Toutes ces inté-

grales $y(x)$ sont algébroïdes pour $x=0$; elles sont holomorphes, pour $x=0$, si l'on n'a pas $A(1, t_1)=0$.

Nous allons montrer, toujours en supposant qu'il n'y ait pas de directions singulières, que ces intégrales sont les seules pour lesquelles x et y tendent à la fois vers zéro. Nous verrons aussi que ces intégrales sont les seules qui satisfont aux conditions initiales $y=y_0$, $x=x_0$, si x_0 et y_0 sont suffisamment petits. Pour étudier ces intégrales relatives aux conditions initiales y_0, x_0, nous aurons, en posant $t_0=\frac{y_0}{x_0}$, à examiner successivement les trois cas suivants :

1° t_0 *est très grand;*

2° t_0 *est voisin d'une racine de* $A(1, t)=0$;

3° t_0 *ne remplit aucune des conditions précédentes.*

Les démonstrations préciseront dans la suite le sens attaché aux mots : suffisamment petit, très grand, etc.

5. *Intégrales pour lesquelles* t_0 *est très grand* (*cas* 1°). — En posant

$$x=uy,$$

nous obtenons l'équation (5). L'examen du cas qui nous occupe sera subdivisé en trois cas différents :

a. Le coefficient de dy *dans* (5) *est nul pour* $u=0$, *quel que soit* y. On voit immédiatement que cela revient à dire que dans (3) le coefficient de $\frac{dy}{dx}$ est nul pour $x=0$, quel que soit y. Dans ce cas a, on doit avoir $A(0, 1)\neq 0$, puisqu'il n'y a pas de direction singulière.

b. On a $A(0, 1)\neq 0$, *mais* u *n'est pas en facteur dans le coefficient de* dy.

c. On a $\varphi_n(0, 1)\neq 0$.

On est toujours dans l'un ou l'autre de ces trois cas, s'il n'y a pas de directions singulières. Le cas où l'on a à la fois $\varphi_n(0, 1)\neq 0$ et $A(0, 1)\neq 0$ rentrera à volonté dans le cas b ou le cas c.

6. *Intégrales pour lesquelles* t_0 *est très grand,* $x=0$ *étant un pôle de* $\frac{dy}{dx}$, *quel que soit* y (*cas* 1°, *sous-cas* a). — L'équation (5)

peut s'écrire

$$\frac{du}{dy} = u^p \mathrm{H}(u, y). \tag{6}$$

p est un entier, en général égal à 1, mais pouvant être supérieur à 1. Il existe des nombres α_1 et ε_1, tels que $\mathrm{H}(u, y)$ soit une fonction holomorphe pour

$$|u| < \alpha_1, \qquad |y| < \varepsilon_1.$$

Si l'on considère $\mathrm{H}(u, y)$ comme un développement suivant les puissances de y, les coefficients de ce développement sont des fonctions rationnelles de u, où le degré du numérateur et du dénominateur peut croître indéfiniment avec le rang du terme.

Nous pouvons représenter l'intégrale $u(y)$ qui, pour $y = y_0$, se réduit à y_0, par le développement

$$u = u_0 + u_0^p [\mathrm{B}_1(y - y_0) + \mathrm{B}_2(y - y_0)^2 + \ldots]. \tag{7}$$

Il existe des nombres α_2, ε_2, tels que le second membre soit une fonction holomorphe de u_0, y_0, et de $y - y_0$, si l'on a

$$|u_0| < \alpha_2, \qquad |y_0| < \varepsilon_2, \qquad |y - y_0| < \varepsilon_2.$$

En remarquant que l'on a

$$x = uy, \qquad x_0 = u_0 y_0,$$

on obtient facilement

$$x = x_0 + u_0 [\mathrm{C}_1(y - y_0) + \mathrm{C}_2(y - y_0)^2 + \ldots]. \tag{7'}$$

Les C_1, C_2, ... sont de même que les B des fonctions de u_0 et de y_0 holomorphes dans les limites indiquées. On a

$$\mathrm{C}_1 = 1 + u_0^{p-1} y_0 \mathrm{B}_1.$$

C_1 n'est pas nul pour $u_0 = 0$, $y_0 = 0$. Désignons par c le minimum du module de C_1 lorsque u_0 et y_0 varient dans les limites indiquées. On peut supposer α_2 et ε_2 assez petits pour que c ne soit pas nul.

Nous pouvons écrire la relation (7′) sous la forme

$$u_0 C_1 (y - y_0)[1 + P + Q] = 0$$

avec

$$P = \frac{x_0 - x}{u_0 C_1 (y - y_0)}, \qquad Q = \frac{C_2 (y - y_0)}{C_1} + \frac{C_3 (y - y_0)^2}{C_1} + \ldots.$$

En reprenant un raisonnement connu, établissant l'existence d'une fonction implicite ([1]), nous voyons qu'on peut trouver un nombre ε_3 (au plus égal à ε_2), tel que l'on ait $|Q| < \frac{1}{2}$, si l'on a $|y - y_0| \leq 2\varepsilon_3$.

En supposant ensuite que l'on considère les valeurs de x pour lesquelles on a

(8) $$|x - x_0| < c u_0 \varepsilon_3,$$

on a $|P| < \frac{1}{2}$, pour $|y - y_0| = 2\varepsilon_3$ et on montre que la relation (7′) définit une valeur de y et une seule satisfaisant à la condition

(9) $$|y - y_0| < 2\varepsilon_3.$$

Si l'on prend

$$|x_0| < \frac{c u_0 \varepsilon_3}{2}, \qquad |x| < \frac{c u_0 \varepsilon_3}{2}, \qquad |y_0| < \varepsilon_3,$$

la condition (8) étant satisfaite, l'unique valeur de y satisfaisant à la condition (9) sera une fonction holomorphe de x et pourra tendre vers 0 avec x. Elle tendra réellement vers 0; en effet, lorsque y tend vers 0, u tend, d'après (7), vers une limite finie (qui peut être nulle), et, comme on a $x = uy$, x tend aussi vers 0.

Si nous désignons par ε' la plus petite des deux quantités ε_3 et $\frac{c\varepsilon_3}{2}$, et si nous posons $\alpha' = \alpha_2$, nous pourrons dire :

L'intégrale $y(x)$ *de l'équation* (3) *qui, pour* $x = x_0$, *prend la*

([1]) *Voir*, par exemple, PICARD, *Traité d'Analyse*, t. II, p. 262, 2e édition.

valeur y_0, *est holomorphe et tend vers zéro avec* x, *si l'on a*

$$\left|\frac{x_0}{y_0}\right| = u_0 < \alpha', \qquad |y_0| < \varepsilon', \qquad |x| \leq |x_0|.$$

La dernière inégalité pourrait d'ailleurs être remplacée par $|x| < 2|x_0|$, à condition de remplacer ε' par $\frac{\varepsilon'}{2}$.

7. t_0 *est très grand et l'on a* $A(0, 1) \neq 0$, *sans que* $x = 0$ *soit un pôle de* $\frac{dy}{dx}$, *quel que soit* y (*cas* 1°, *sous-cas* b). — L'équation (5) peut s'écrire

$$\frac{du}{dy} = H(u, y),$$

$H(u, y)$ désignant comme précédemment une fonction de u et de y, holomorphe pour u et y suffisamment petits. On peut considérer H comme un développement suivant les puissances de y, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de u.

Les premiers de ces coefficients peuvent être nuls pour $u = 0$ [le terme indépendant de y sera nul si l'on a $\varphi_n(0, 1) = 0$], mais tous les coefficients ne peuvent être nuls pour $u = 0$, dans l'hypothèse où nous nous plaçons. Supposons que le coefficient de y^p ne soit pas nul pour $u = 0$, les coefficients précédents étant nuls pour $u = 0$.

L'intégrale qui, pour $y = y_0$, se réduit à u_0, peut être représentée par le développement

$$u = u_0 + B_1(y - y_0) + \ldots + B_p(y - y_0)^p + B_{p+1}(y - y_0)^{p+1} + \ldots.$$

Il existe des nombres α_1 et ε_1 tels que le second membre soit une fonction holomorphe de u_0, y_0, $y - y_0$, si l'on a

$$|u_0| < \alpha_1, \qquad |y_0| < \varepsilon_1, \qquad |y - y_0| < \varepsilon_1.$$

En particulier, les coefficients B_1, B_2, ... sont des fonctions holomorphes de u_0 et de y_0, dans les limites indiquées.

Les coefficients B_1, B_2, ..., B_p sont nuls pour $u_0 = 0$, $y_0 = 0$; le coefficient B_{p+1} n'est pas nul pour ces valeurs. On obtient comme pré-

cédemment

$$(10)\quad \begin{cases} x = (y_0 + y - y_0)[u_0 + B_1(y - y_0) + \ldots \\ \qquad\qquad + B_{p+1}(y - y_0)^{p+1} + \ldots], \end{cases}$$

$$(10')\quad \begin{cases} x = x_0 + C_1(y - y_0) + \ldots \\ \qquad + C_{p+1}(y - y_0)^{p+1} + C_{p+2}(y - y_0)^{p+2} + \ldots. \end{cases}$$

On a

$$C_{p+2} = B_{p+1} + y_0 B_{p+2}.$$

C_{p+2} n'est donc pas nul pour $u_0 = y_0 = 0$, tandis que les coefficients qui le précèdent sont nuls.

Il résulte de là, d'après le théorème d'existence des fonctions implicites, qu'il existe des nombres α_2, ε_2, η_2, tels que, si l'on a

$$|u_0| \leqq \alpha_2, \qquad |y_0| \leqq \varepsilon_2, \qquad |x - x_0| \leqq 2\eta_2,$$

les valeurs de y vérifiant la relation (10′) et satisfaisant à la condition

$$(11)\qquad |y - y_0| \leqq 2\varepsilon_2$$

soient en nombre égal à $p + 2$. Si nous prenons

$$|x_0| < \eta_2, \qquad |x| \leqq \eta_2,$$

nous avons $p + 2$ déterminations de y satisfaisant à la condition (11). Ces déterminations sont évidemment des fonctions algébroïdes pour $|x| < \eta$; elles peuvent tendre vers zéro avec x, puisque cela est compatible avec la condition (11), mais il n'en est pas nécessairement ainsi. Lorsque x tend vers zéro, les valeurs de y, satisfaisant à la relation (10) et à la condition (11), doivent tendre vers les valeurs de y, qui satisfont à la condition (11) et annulent un des deux facteurs du second membre de (10). Il en résulte qu'une des déterminations de y tend vers la valeur $y = 0$ qui annule le premier facteur, tandis que les $p + 1$ autres déterminations tendent vers les $p + 1$ valeurs de y, qui satisfont à la condition (11) et annulent le second facteur; exceptionnellement, quelques-unes de ces valeurs de y peuvent être nulles. Nous pouvons remarquer que les $p + 2$ déterminations de y que nous

considérons satisfaisant à une équation entière en y de degré $p+2$, dont les coefficients sont des fonctions holomorphes de x dans le domaine $|x|<\eta_2$, les points critiques de ces déterminations sont en nombre fini dans le domaine considéré ([1]). La position et peut-être le nombre de ces points critiques varient avec les valeurs des conditions initiales u_0, y_0, puisque les coefficients de l'équation entière considérée sont des fonctions de u_0 et y_0.

Rien, dans ce qui précède, ne nous permet d'affirmer que les $p+2$ déterminations de y que nous considérons se permutent entre elles autour des points critiques dont nous venons de parler. Il peut très bien se faire que certaines d'entre elles soient, au moins lorsque u_0 et y_0 varient dans certaines limites, des fonctions holomorphes pour $|x|<\eta_2$. Mais nous pouvons affirmer que, si l'on part de la détermination $y(x)$ qui pour x_0 est égale à y_0, on pourra toujours, en tournant, s'il y a lieu, autour de points critiques convenables, obtenir la détermination qui, pour $x=0$, se réduit à $y=0$. En effet, lorsque y tend vers zéro, le deuxième facteur du second membre de (10), c'est-à-dire u, tend vers une limite finie; x tend, par suite, vers 0. Donc, x tendant vers 0, suivant un chemin convenable, y tend vers 0.

Cette restriction imposée à x de tendre vers 0 en suivant un chemin convenable se réduit, puisque y est une fonction algébroïde, à exiger que le chemin considéré tourne, s'il y a lieu, autour de certains points critiques, ou ne tourne pas autour de certains autres.

Nous pouvons énoncer le résultat suivant : *Si l'on a*

$$u_0<\alpha_2, \qquad |y_0|<\varepsilon_2, \qquad |x_0|<\eta_2,$$

il existe une intégrale $y(x)$ satisfaisant à la condition initiale $y(x_0)=y_0$ et tendant vers zéro avec x. Cette intégrale est une branche d'une fonction algébroïde pour $|x|\leqq\eta_2$. Cette fonction algébroïde peut posséder dans le domaine considéré d'autres déterminations dont il est facile de déterminer le nombre maximum $(p+1)$;

([1]) On peut sans difficulté montrer, dans ce cas comme dans les cas suivants, que le nombre maximum des points critiques est inférieur, au moins d'une unité, au nombre maximum des déterminations de y.

en général, aucune de ces autres déterminations ne tend vers zéro avec x.

8. *t_0 est très grand et l'on a $\varphi_n(0, 1) \neq 0$ (cas 1°, sous-cas c).* — L'équation (5) peut s'écrire

$$\frac{dy}{du} = \mathrm{H}(u, y),$$

$\mathrm{H}(u, y)$ étant holomorphe, pour u et y suffisamment petits. Nous pouvons représenter l'intégrale $y(u)$ qui, pour $u = u_0$, se réduit à y_0 par le développement

$$y = y_0 + \mathrm{A}_1(u - u_0) + \ldots + \mathrm{A}_p(u - u_0)^p + \mathrm{A}_{p+1}(u - u_0)^{p+1} + \ldots.$$

Il existe, comme précédemment, des nombres ε_3 et α_3 tels que le second membre soit une fonction holomorphe de u_0, y_0, $u - u_0$, si l'on a

$$|u_0| < \alpha_3, \qquad |y_0| < \varepsilon_3, \qquad |u - u_0| < \alpha_3.$$

Si nous supposons que $u = 0$ soit racine d'ordre p, mais non racine d'ordre $p + 1$ de $\mathrm{A}(u, 1) = 0$ (en général, $p = 0$), on voit facilement que les coefficients $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_p$ sont nuls pour $y_0 = u_0 = 0$, tandis que A_{p+1} n'est pas nul pour ces valeurs.

Nous avons

$$x = uy, \qquad x_0 = u_0 y_0;$$

$$(12) \quad x = (u_0 + u - u_0)[y_0 + \mathrm{A}_1(u - u_0) + \ldots + \mathrm{A}_p(u - u_0)^p + \mathrm{A}_{p+1}(u - u_0)^{p+1} + \ldots],$$

$$(12') \quad x = x_0 + \mathrm{B}_1(u - u_0) + \ldots + \mathrm{B}_{p+1}(u - u_0)^{p+1} + \mathrm{B}_{p+2}(u - u_0)^{p+2} + \ldots.$$

Les B sont comme les A des fonctions holomorphes de u_0 et y_0.

$\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \ldots, \mathrm{B}_{p+1}$ sont nuls pour $u_0 = y_0 = 0$, tandis que

$$\mathrm{B}_{p+2} = u_0 \mathrm{A}_{p+2} + \mathrm{A}_{p+1}$$

n'est pas nul pour ces valeurs.

On conclut de l'égalité (12'), d'après le théorème d'existence des

fonctions implicites, qu'il existe des nombres η_4 et α_4, tels que, si l'on a

$$(13) \qquad |u_0| < \alpha_4, \qquad |x_0| < \eta_4, \qquad |x| < \eta_4,$$

les valeurs de u vérifiant la relation (12') et satisfaisant à

$$|u - u_0| < \alpha_4$$

soient en nombre égal à $p+2$. Ces $p+2$ déterminations de u sont racines d'une équation en u de degré $p+2$ dont les coefficients sont des fonctions holomorphes de u_0, x_0, x, vérifiant les conditions (13). Cela revient à dire que les $p+2$ valeurs de y correspondantes sont des fonctions algébroïdes de u_0, x_0, x.

Voyons vers quelles limites tendent ces déterminations, soit de u, soit de y, lorsque x tend vers o. D'après (12), ces valeurs de u tendent vers les valeurs de u annulant l'un ou l'autre des facteurs du second membre, donc une des valeurs de u tend vers o annulant le premier facteur, tandis que les $p+1$ autres tendent vers les valeurs de u annulant le second facteur, c'est-à-dire y. Donc $p+1$ des déterminations de y tendent vers o, tandis que l'autre détermination de y tend vers une limite, en général différente de o, mais cependant très petite. Si nous ne pouvons affirmer que toutes ces $p+2$ déterminations se permutent entre elles, lorsque x varie dans le domaine considéré, nous pouvons cependant affirmer que, partant de la détermination $y(x)$, qui pour $x = x_0$ est égale à y_0, on obtiendra, en tournant, s'il y a lieu, autour de points critiques convenables, une des $p+1$ déterminations de y qui tendent vers o avec x. En effet, lorsque y tend vers o, u tend vers une des $p+1$ valeurs de u annulant le second facteur du second membre de (12), x tend donc aussi vers o, puisque l'on a $x = uy$. En raisonnant comme dans le cas précédent, nous voyons que cela suffit à montrer que y tend vers o avec x.

Nous pouvons énoncer le résultat suivant, tout à fait analogue à celui du cas précédent, avec lequel il se confond, si l'on a $p = 0$: *Si l'on a*

$$|u_0| < \alpha_4, \qquad |y_0| < \varepsilon_3, \qquad |x_0| < \eta_4, \qquad |x| \leq \eta_4,$$

il existe une intégrale $y(x)$, qui pour $x = x_0$ est égale à y_0, et qui

tend vers o *avec* x. Cette intégrale est constituée par un certain nombre de branches d'une fonction algébroïde de x. (On peut déterminer le nombre maximum de ces branches.) Pour toutes ces branches, y tend vers o avec x. Cette fonction algébroïde peut, en outre, posséder une autre branche pour laquelle y ne tend pas vers o avec x.

9. *Intégrales pour lesquelles* t_0 *est très voisin d'une racine de* $A(1, t) = 0$ (*cas* 2°). — Posons $y = tx$, nous obtenons l'équation (4), qui peut s'écrire, puisqu'il n'y a pas de directions singulières,

$$\frac{dx}{dt} = H(x, t)$$

H étant une fonction holomorphe de x et de t, pour x suffisamment petit et pour t suffisamment voisin d'une racine t_i de $A(1, t)$. L'intégrale $x(t)$, qui pour $t = t_0$ se réduit à x_0, peut être représentée par

$$(14) \qquad x = x_0 + A_1(t - t_0) + \ldots + A_{p+1}(t - t_0)^{p-1} + \ldots$$

et il existe des nombres η_i, β_i, tels que le second membre soit une fonction holomorphe de t_0, x_0, $t - t_0$, si l'on a

$$|t_i - t_0| < \beta_i, \qquad |x_0| < \eta_i, \qquad |t - t_i| < \beta_i.$$

Si nous supposons que $t = t_i$ soit une racine d'ordre p de

$$A(1, t) = 0,$$

les coefficients A_1, A_2, ..., A_p seront nuls pour $t_0 = t_i$, $x = 0$; mais A_{p+1} n'est pas nul pour ces valeurs.

Il en résulte qu'il existe des nombres β'_i et η'_i tels que, si l'on a

$$|t_i - t_0| < \beta'_i, \qquad |x_0| < \eta'_i, \qquad |x| \leqq \eta'_i,$$

les valeurs de t vérifiant la relation (14) et satisfaisant à la condition

$$(15) \qquad |t - t_0| < \beta'_i$$

seront exactement en nombre égal à $p + 1$. A ces $p + 1$ déterminations de t correspondent, d'après $y = tx$, $p + 1$ déterminations de y,

qui, comme les valeurs de t, sont des fonctions algébroïdes de x. Lorsque x tend vers o, les $p+1$ valeurs de t tendent vers des limites satisfaisant à la condition (15), donc les $p+1$ valeurs de y tendent vers o. Nous pouvons par suite énoncer le résultat suivant : *Si l'on a*

$$|t_i - t_0| < \beta_i, \qquad |x_0| < \gamma_{1i}, \qquad |x| \leq \gamma_{1i},$$

l'intégrale $y(x)$ de l'équation (1), *qui pour $x = x_0$ est égale à y_0, est une fonction algébroïde de x dont on peut déterminer le nombre maximum des déterminations dans le domaine considéré. Toutes ces déterminations tendent vers* o *avec x.*

Pour chacune des racines t_i, il existera des nombres β_i et γ_{1i}; nous désignerons par β le plus petit des β_i et par γ_1 le plus petit des γ_{1i}.

10. *Intégrales pour lesquelles t_0 n'est ni très grand, ni voisin d'une racine de* $A(1, t) = 0$ (*cas* 3°). — D'une façon plus précise nous supposerons que l'on n'ait pas

$$(16) \qquad |t_0| > \frac{1}{\alpha} \qquad \text{ou} \qquad |t_0 - t_i| < \beta,$$

α étant le plus petit des nombres α', α_2, α_4 trouvés dans les divers cas de 1°. La seconde des inégalités (16) doit avoir lieu pour les diverses racines t_i de $A(1, t)$.

Soit D l'ensemble des valeurs de t pour lesquelles on a

$$|t| < \frac{1}{\alpha} + \frac{\beta}{2}, \qquad |t - t_i| > \frac{\beta}{2}.$$

On peut trouver un nombre γ_1, tel que, si t appartient à l'ensemble D et si l'on a $|x| < \gamma_1$, le coefficient de dt dans l'équation (4) ne s'annule pas, et cette équation peut s'écrire

$$\frac{dt}{dx} = H(x, t),$$

H étant une fonction holomorphe de x et de t pour les valeurs considérées. Pour ces valeurs, H restera inférieur en module à un certain

nombre M. Il en résulte qu'il existe un nombre η'_i, tel que l'intégrale $t(x)$, qui pour $x = x_0$ prend la valeur de t_0, soit une fonction holomorphe de x, si l'on a

$$|x_0| < \eta'_i, \qquad |t_0| \leqq \frac{1}{\alpha}, \qquad |t_0 - t_i| > \beta, \qquad |x| < \eta'_i,$$

t tendra vers une limite finie, lorsque x tend vers o.

D'après la relation $y = tx$, l'intégrale $y(x)$ de l'équation (3), qui pour $x = x_0$ prend la valeur y_0 ($y_0 = t_0 x_0$), sera une fonction holomorphe de x et tendra vers o avec x.

11. *Conclusions.* — Si nous désignons par ε le plus petit des nombres η et ε affectés d'indices que nous avons trouvés, nous pourrons résumer les divers résultats précédents en disant : *Il existe un nombre* ε *tel que, si l'on a*

$$|x_0| \leqq \varepsilon, \qquad |y_0| \leqq \varepsilon,$$

l'intégrale de l'équation (3) *qui répond à la condition* $y(x_0) = y_0$ *soit, pour* $|x| \leqq \varepsilon$, *une fonction algébroïde, dont une au moins des déterminations tend vers* o *avec* x, *en même temps que* $\frac{y}{x}$ *tend vers une limite finie ou infinie.*

Il en résulte que si, pour une de ces intégrales, on considère une des déterminations tendant vers o avec x, cette détermination sera fournie soit par l'intégrale de (4) qui pour $x = 0$ prend une valeur $t = c$, convenablement choisie, soit par l'intégrale de (5) qui répond aux conditions initiales $x = 0$, $u = 0$.

Toutes les déterminations de y tendent vers o avec x dans les deux cas suivants : 1° *x est en facteur dans le coefficient de* $\frac{dy}{dx}$; 2° *on a* $t_0 \leqq \frac{1}{\alpha}$. Le premier de ces cas nous donne le théorème suivant : *Si x est en facteur dans le coefficient de* $\frac{dy}{dx}$, *toute intégrale* $y(x)$ *correspondant aux conditions initiales* $|x_0| \leqq \varepsilon$, $|y_0| \leqq \varepsilon$ *tend vers* o *avec* x.

Si nous appelons *direction critique* un système de valeurs de x

et y pour lesquelles $x\mathrm{A}(x, y)$ est nul, avec la restriction que $x = 0$ ne sera pas une direction critique, si x est en facteur dans le coefficient de $\frac{dy}{dx}$, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Si x_0 et y_0 ne sont pas voisins d'une direction critique, l'intégrale relative aux valeurs initiales x_0, y_0 est holomorphe pour $|x| < |x_0|$.

Si nous ne voulons pas considérer exclusivement, comme dans ce qui précède, le cas où la variable indépendante x est donnée, mais si nous cherchons des systèmes de valeurs de x et y dépendant d'un paramètre z et satisfaisant à l'équation différentielle, nous dirons qu'on peut toujours obtenir les valeurs de x et y, correspondant à des conditions initiales x_0, y_0 suffisamment petites, au moyen de deux développements suivant les puissances d'un paramètre z. Ces développements convergent dans un certain cercle du plan de la variable complexe z. Lorsque z varie dans ce cercle, le développement représentant x ou celui représentant y (suivant le paramètre z choisi) prend toutes les valeurs inférieures en module à la valeur initiale correspondante; de plus, pour une valeur de z au moins, x et y sont nuls simultanément.

On voit enfin qu'à l'exception des intégrales pour lesquelles la tangente à l'origine satisfait à l'équation $\mathrm{A}(x, y) = 0$ et pour lesquelles l'origine est un point de rebroussement, l'origine est pour toutes les autres courbes intégrales voisines de l'origine un point ordinaire : une des variables x ou y est une fonction holomorphe de l'autre.

Tous ces énoncés résultent immédiatement des paragraphes précédents.

12. *Cas où il existe des directions singulières.* — Si le point dicritique considéré présente des directions singulières, les résultats précédents ne peuvent subsister intégralement. Supposons, par exemple, pour fixer les idées, que $\frac{y}{x} = 0$ soit une direction singulière; c'est-à-dire supposons que $\mathrm{A}(x, y)$ et $\psi_n(x, y)$ admettent l'un et l'autre y en facteur. L'équation (4) en x et t admettra le point singulier $x = 0$, $t = 0$. La plupart des singularités qui se présentent dans le voisinage

d'un point singulier pourront se présenter : les coefficients des termes de moindre degré en t et x pourront en effet avoir des valeurs quelconques. Il pourra y avoir un nombre fini ou infini d'intégrales pour lesquelles t tend vers o, avec x; ces intégrales pourront admettre $x = 0$ comme point ordinaire ou comme point transcendant. Il faut cependant remarquer que $x = 0$ ne sera jamais un point essentiel : en effet, $A(1, t)$ n'étant jamais identiquement nul, le coefficient de dt dans (4) ne contient jamais x en facteur, t tend toujours vers une limite lorsque x tend vers o. Cette limite peut, bien entendu, dépendre de la façon dont x tend vers o, puisque plusieurs déterminations de t peuvent se permuter dans le voisinage de $x = 0$.

L'existence d'une direction singulière, $t = 0$ par exemple, ne changerait pourtant rien aux résultats énoncés précédemment, si toutes les intégrales relatives aux valeurs initiales suffisamment petites x_0, t_0 étaient algébroïdes pour $|x| < |x_0|$, et restaient finies lorsque x tend vers o. C'est ce qui se produit si $t = 0$, $x = 0$ est un point dicritique pour l'équation en t et x.

Un cas plus important à signaler est celui où la direction $x = 0$ n'est pas une direction singulière; c'est-à-dire le cas où $A(x, y)$ et $\varphi_n(x, y)$ ne contiennent pas l'un et l'autre x en facteur. Les résultats établis dans le cas 1° subsistent :

Si $|t_0| = \left|\frac{y_0}{x_0}\right|$ est suffisamment grand $\left(\text{d'une façon précise } |t_0| > \frac{1}{\alpha}\right)$ et si x_0 et y_0 sont suffisamment petits, l'intégrale répondant aux conditions initiales x_0, y_0 est, pour $|x| < |x_0|$, une fonction algébroïde, dont une au moins des déterminations tend vers o avec x. Dans le cas particulier où x est en facteur dans le coefficient de $\frac{dy}{dx}$, cette intégrale est, pour $|x| < |x_0|$, une fonction holomorphe et tend vers o avec x.

Il résulte de là que, dans le cas où $x = 0$ n'est pas direction singulière, toute intégrale $y(x)$ dont les valeurs initiales x_0, y_0 sont suffisamment petites est une fonction qui peut ne pas être algébroïde, s'il y a des directions singulières, et peut, pour x voisin de o, admettre une infinité de déterminations; un nombre fini [1] de ces détermina-

---

[1] Si l'on a $|t_0| > \frac{1}{\alpha}$ ou si x est en facteur dans le coefficient de $\frac{dy}{dx}$, ce nombre

tions tendent vers une limite différente de o, lorsque x tend vers o, mais toutes les autres, en nombre au moins égal à un, tendent vers o. En particulier, si x est en facteur dans le coefficient de $\frac{dy}{dx}$ et si l'on n'a pas $A(0, y) = 0$, y tend toujours vers o avec x, si les valeurs initiales x_0, y_0 sont suffisamment petites. Ce théorème résulte en effet de l'examen des divers cas de 1°, si l'on considère les intégrales pour lesquelles on a $|t_0| > \frac{1}{2}$. Si cette dernière condition n'est pas remplie, ou bien t ne devient pas supérieur à $\frac{1}{2}$, lorsque x tend vers o, ou bien t prend, pour une valeur $x = x_1$, une valeur $t = t_1$ avec $|t_1| > \frac{1}{2}$. Dans le premier cas, $y = tx$ tend évidemment vers o avec x. Dans le second cas, en considérant l'intégrale relative aux valeurs initiales x_1, t_1, on est dans le cas 1°.

Par exemple, si l'on considère l'équation

$$x(y + x^2)\frac{dy}{dx} = y(y + 2x^2),$$

le point dicritique $x = y = 0$ admet la direction singulière $y = 0$. En posant $y = tx$, l'équation devient

$$(t + x)\,dt = t\,dx.$$

Nous avons une infinité d'intégrales transcendantes pour lesquelles t tend vers o avec x. L'intégrale générale est donnée par

$$x = Ct + t\log t$$

ou

$$\frac{y}{x}e^{-\frac{x^2}{y}} = \text{const.}$$

---

fini est nul; si l'on a $|t_0| > \frac{1}{2}$, ce nombre est le nombre déterminé dans le cas 1°, sous-cas b et c.

On vérifierait facilement que y tend vers 0, de quelque façon que x tende vers 0. Les théorèmes que nous avons démontrés n'établissaient ce fait que pour les intégrales prenant des valeurs x_0, y_0 suffisamment petites.

Réduction d'un réseau de formes quadratiques ou bilinéaires;

PAR M. CAMILLE JORDAN.

PREMIÈRE PARTIE.

RÉSEAUX DE FORMES QUADRATIQUES.

1. Soit

$$R = \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \ldots + \lambda_m \varphi_m$$

un réseau dérivé de m formes quadratiques $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ des n variables $x_1, \ldots, x_n$. On peut se proposer de le réduire à une forme canonique par des transformations linéaires effectuées tant sur les x, d'une part, que sur les λ, d'autre part.

Ces transformations comportent $m^2 + n^2$ coefficients indéterminés; mais, R ne changeant pas si l'on multiplie simultanément les x par a et les λ par a^{-2}, le nombre des indéterminées utiles se réduit à $m^2 + n^2 - 1$. Si ce nombre est inférieur à celui des coefficients des formes φ, lequel est $m\frac{n(n+1)}{2}$, l'expression canonique cherchée contiendra dans le cas général

$$m^2 + n^2 - 1 - m\frac{n(n+1)}{2}$$

invariants.

Mais, dans certains cas particuliers, le réseau ne sera pas réductible

à cette expression générale; chacun d'eux donnera lieu à une forme canonique spéciale. Et, pour déterminer si deux réseaux R, R' sont équivalents ou non, il sera nécessaire d'avoir formé le Tableau de toutes ces formes canoniques, tant générales que particulières.

Ce problème se réduit immédiatement au cas où les fonctions φ sont linéairement distinctes et où aucune substitution linéaire opérée sur les x ne peut faire disparaître complètement une de ces variables de l'expression des φ.

En effet, si l'on pouvait amener les φ à ne dépendre que des ν variables $x_1, \ldots, x_\nu$ et si d'autre part ces fonctions s'exprimaient linéairement par μ d'entre elles, on n'aurait plus qu'à réduire un réseau dérivé de μ formes à ν variables satisfaisant aux conditions ci-dessus. Supposons qu'on ait résolu cette question et trouvé $N_{\mu\nu}$ types canoniques distincts.

Le nombre total des types possibles pour les réseaux de m formes à n variables sera évidemment

$$M_{mn} = \sum_{\mu,\nu} N_{\mu\nu} \qquad \begin{pmatrix} \mu = 1, 2, \ldots, m \\ \nu = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}.$$

Ceux de ces types où les fonctions φ sont linéairement distinctes seront en nombre

$$P_{mn} = \sum_{\nu} N_{m\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

et ceux où le système de ces fonctions dépend de toutes les variables x seront en nombre

$$Q_{mn} = \sum_{\mu} N_{\mu n} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m).$$

Le problème ainsi restreint reste encore assez complexe lorsque m et n sont quelconques. Aussi nous bornerons-nous aux cas les plus simples.

2. Remarquons tout d'abord que les fonctions φ, dépendant uniquement des $\frac{n(n+1)}{2}$ quantités $x_i x_k$, seront nécessairement liées par

des relations linéaires, si $m > \frac{n(n+1)}{2}$; et, si $m = \frac{n(n+1)}{2}$, une substitution linéaire, opérée sur les λ, ramènera toujours le réseau à la forme

$$\sum \lambda_{ik} x_i x_k.$$

Nous avons donc ce premier résultat :

$$N_{mn} = 0, \qquad \text{si} \qquad m > \frac{n(n+1)}{2},$$

$$N_{mn} = 1, \qquad \text{si} \qquad m = \frac{n(n+1)}{2}$$

(d'où en particulier $N_{3,2} = 1$).

En second lieu, si $m = 1$, nous n'aurons qu'une seule fonction φ_1; on sait qu'on peut la ramener (d'une infinité de manières) à une somme de carrés. On aura par suite un seul type canonique

$$\lambda(x_1^2 + \ldots + x_n^2).$$

Donc

$$N_{1n} = 1.$$

Nous allons traiter successivement deux autres cas :

1° Celui où $m = 2$;

2° Celui où $n = 3$.

§ I. — Réduction d'un faisceau dérivé de deux formes quadratiques à n variables.

3. Soit $F = \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2$ le faisceau considéré. Le problème de la réduction simultanée des deux fonctions φ_1, φ_2 (par une substitution linéaire opérée sur les x) a fait l'objet de nombreux travaux. Il est aujourd'hui entièrement résolu. Nous allons résumer rapidement les résultats acquis [1], en y ajoutant un léger complément nécessaire pour notre objet actuel; car ici nous effectuons des substitutions

---

[1] *Voir* Weierstrass, *Werke*, t. II, p. 19-44. — Kronecker, *Werke*, t. I, p. 349-372. — Darboux, *Journal de Liouville*, 1874, p. 347-396. — Jordan, *Ibid.*, p. 397-423.

linéaires, non seulement sur les x, mais aussi sur les λ (cette dernière opération revient à remplacer φ_1, φ_2 comme formes génératrices du faisceau par deux de leurs combinaisons linéaires).

4. Le faisceau F peut être *simple* ou *composé*. On dit qu'il est composé, si les variables peuvent être choisies de manière à se répartir en plusieurs séries

$$x_1, x_2, \ldots; \quad y_1, y_2, \ldots; \quad \ldots,$$

telles que l'on ait

$$\varphi_1 = X_1 + Y_1 + \ldots, \qquad \varphi_2 = X_2 + Y_2 + \ldots,$$

X_1, X_2 étant des fonctions des x seuls; Y_1, Y_2 des fonctions des y seuls, etc.

5. *Faisceaux simples.* — Si un faisceau simple F contient des formes de déterminant $\gtrless 0$ (ce qui arrivera nécessairement si le nombre n des variables est pair), soit $\psi_1 = l_1\varphi_1 + l_2\varphi_2$ l'une d'elles choisie à volonté; F contiendra d'autres formes de déterminant nul: soit ψ_2 l'une d'elles, choisie à volonté. On pourra réduire simultanément ψ_1 et ψ_2 aux expressions suivantes :

$$\psi_1 = A_x^n, \qquad \psi_2 = B_x^n$$

en posant pour abréger :

1° Si n est pair,

$$A_x^n = 2(x_1x_2 + x_3x_4 + \ldots + x_{n-1}x_n),$$
$$B_x^n = 2(x_2x_3 + x_4x_5 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}) + x_n^2.$$

2° Si n est impair,

$$A_x^n = 2(x_1x_2 + x_3x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}) + x_n^2,$$
$$B_x^n = 2(x_2x_3 + x_4x_5 + \ldots + x_{n-1}x_n).$$

Les formes du faisceau ont pour expression générale

$$\lambda_1 A_x^n + \lambda_2 B_x^n,$$

et l'on voit immédiatement que le déterminant de cette forme sera nul si $\lambda_1 = 0$, $\gtrless 0$ dans le cas contraire.

Si donc nous considérons deux formes

$$aA''_x + bB''_x, \quad cB''_x,$$

a, b, c étant des constantes quelconques telles que $a \gtrless 0$, $c \gtrless 0$, la première aura son déterminant $\gtrless 0$; celui de la seconde sera nul. On pourra donc, par un changement de variables, les transformer en A''_x, B''_x ou réciproquement.

Soient maintenant

$$\varphi_1 = \alpha A''_x + \beta B''_x, \qquad \varphi_2 = \gamma A''_x + \delta B''_x$$

les deux formes génératrices du faisceau. On pourra les ramener simultanément à une expression canonique ne dépendant que de l'invariant $\frac{\gamma}{\alpha} = s$.

Appliquons en effet le changement de variables qui transforme

$$A''_x,\ B''_x \quad \text{en} \quad aA''_x + bB''_x,\ cB''_x;$$

φ_1, φ_2 seront transformés en

$$\alpha a A''_x + (\alpha b + \beta c) B''_x,$$
$$\gamma a A''_x + (\gamma b + \delta c) B''_x.$$

Si α n'est pas nul, on pourra déterminer b, c par les relations

$$\alpha b + \beta c = 0, \qquad \gamma b + \delta c = 1$$

(car φ_1, φ_2 étant linéairement indépendantes, $\alpha\delta - \beta\gamma \gtrless 0$), puis a par la relation

$$\alpha a = 1, \qquad \text{d'où} \qquad \gamma a = s.$$

Les valeurs obtenues pour a et c ne sont pas nulles, et φ_1, φ_2 seront respectivement réduites aux expressions suivantes :

$$\varphi_1 = A''_x, \qquad \varphi_2 = sA''_x + B''_x.$$

Si $\alpha = 0$, on déterminera a, b, c par les relations

$$\beta c = 1, \qquad \gamma b + \delta c = 0, \qquad \gamma a = 1.$$

On trouvera ainsi

$$\varphi_1 = B_x^n, \qquad \varphi_2 = A_x^n$$

pour l'expression réduite correspondante au cas où l'invariant s est infini.

Enfin, si aux formes φ_1, φ_2 nous substituons de nouvelles formes génératrices

$$l_1\varphi_1 + l_2\varphi_2, \quad m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2,$$

les coefficients α, γ étant changés en

$$l_1\alpha + l_2\gamma, \quad m_1\alpha + m_2\gamma,$$

l'invariant s sera changé en

$$\frac{m_1 + m_2 s}{l_1 + l_2 s},$$

subissant ainsi une transformation homographique.

6. Si n est un nombre impair $2k + 1$ plus grand que l'unité, il existe un autre type de faisceaux simples, dont toutes les formes ont un déterminant nul. Deux quelconques d'entre elles (linéairement indépendantes) peuvent être ramenées simultanément aux formes suivantes :

$$\psi_1 = C_x^n, \qquad \psi_2 = D_x^n,$$

en posant pour abréger

$$C_x^n = 2(x_1 x_2 + \ldots + x_{n-2} x_{n-1}),$$
$$D_x^n = 2(x_2 x_3 + \ldots + x_{n-1} x_n).$$

7. *Faisceaux composés.* — Dans un semblable faisceau, les variables se répartissent en groupes, tels que les deux formes génératrices aient pour expression

$$\varphi_1 = X_1 + Y_1 + \ldots, \qquad \varphi_2 = X_2 + Y_2 + \ldots,$$

X_1, X_2 ne contenant que les variables x du premier groupe; Y_1, Y_2 les variables y du second groupe, etc.

Considérons l'un de ces groupes, contenant m variables x; elles se répartiront en séries

$$x'_1, x'_2, \dots; \quad x''_1, x''_2, \dots; \quad \dots$$

contenant respectivement m', m'', ... variables; et les fonctions X_1, X_2, ... auront respectivement les formes suivantes :

$$X_1 = \quad A_{x'}^{m'} \qquad + \quad A_{x''}^{m''} \qquad + \dots,$$
$$X_2 = s_1 A_{x'}^{m'} + B_{x'}^{m'} + s_1 A_{x''}^{m''} + B_{x''}^{m''} + \dots.$$

où figure un invariant s_1.

A chacun des autres groupes correspondent des fonctions partielles Y_1, Y_2, ... d'une forme analogue à la précédente, mais avec des invariants s_2, ..., tous différents.

Si parmi ces groupes il en est un pour lequel l'invariant soit infini, les fonctions partielles correspondantes Z_1, Z_2 auront, au lieu de la forme ci-dessus, celle-ci :

$$Z_1 = B_{z'}^{\mu'} + B_{z''}^{\mu''} + \dots,$$
$$Z_2 = A_{z'}^{\mu'} + A_{z''}^{\mu''} + \dots.$$

Enfin on peut avoir un dernier groupe, tel que le faisceau partiel $\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2$ qui lui correspond ne contienne que des formes à déterminant nul; U_1, U_2 auront respectivement les expressions suivantes :

$$U_1 = C_{u'}^{\nu'} = C_{u''}^{\nu''} + \dots,$$
$$U_2 = D_{u'}^{\nu'} + D_{u''}^{\nu''} + \dots$$

(les nombres ν', ν'', ... de variables contenues dans les diverses séries de ce groupe étant nécessairement impairs).

Les variables peuvent ne former qu'un seul groupe; celles d'un même groupe peuvent ne former qu'une série. Mais, s'il n'y a en tout qu'une seule série, le faisceau sera simple.

8. Les nombres s_1, s_2, ... forment un système d'invariants simul-

tanés des deux formes φ_1, φ_2. Mais, si on leur substitue comme génératrices du faisceau deux de leurs combinaisons linéaires (ce qui revient à une transformation linéaire des λ), on pourra faire disparaître trois de ces invariants.

Soit, en effet,

$$\varphi'_1 = l_1\varphi_1 + l_2\varphi_2, \qquad \varphi'_2 = m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2,$$

et considérons les diverses formes partielles dont ces expressions sont composées.

Les fonctions

$$l_1 C_{u'}^{\nu'} + l_2 D_{u'}^{\nu'}, \quad m_1 C_{u'}^{\nu'} + m_2 D_{u'}^{\nu'}$$

peuvent être ramenées (n° 6) par une substitution linéaire opérée sur les u' à la forme

$$C_{u'}^{\nu'}, \quad D_{u'}^{\nu'}.$$

D'autre part (n° 5) les invariants s_1, s_2, ... subissent par ce changement (combiné avec des substitutions linéaires convenables effectuées sur les variables x, y, ...) une même transformation homographique

$$\left| s \quad \frac{m_1 + m_2 s}{l_1 + l_2 s} \right|$$

qu'on peut choisir de telle sorte que trois d'entre eux prennent des valeurs arbitraires, telles que 0, ∞, 1. On aura ainsi épuisé les ressources dont on dispose pour la réduction. Il y aura autant de types canoniques que de répartitions possibles des variables en groupes et en séries. Quelques-uns des types obtenus pourront encore renfermer des invariants.

9. Quelques précautions sont toutefois nécessaires pour éviter les doubles emplois en dressant le Tableau des formes canoniques. Nous pouvons, en effet, choisir à volonté ceux des groupes dont nous réduisons les invariants à 0, ∞, 1 respectivement.

Pour lever cette indétermination, il suffit d'ordonner les groupes suivant une règle bien définie. Soit Γ l'un d'eux, contenant M variables, réparties en k séries, qui en contiennent respectivement $m_1, \ldots, m_k$. Soit $m_1 \geq m_2 \geq \ldots \geq m_k$.

Soit Γ' un autre groupe, pour lequel les nombres correspondants soient M', k', m'_1, ..., m'_k. Nous dirons que le groupe Γ précède le groupe Γ' :

1° Si $M > M'$;

2° Si $M = M'$, mais $k > k'$;

3° Si $M = M'$, $k = k'$, mais $m_1 > m'_1$;

etc.

Les groupes étant ainsi ordonnés, nous réduirons l'invariant du premier à zéro, celui du second à ∞, celui du troisième à l'unité.

10. Il est aisé, en partant de ces principes, de former le Tableau suivant des divers types réduits pour $n = 2, 3, 4, \ldots$.

1° $n = 2$.

On a deux types distincts :

(*a*) $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2$,

(*b*) $\lambda_1 2x_1x_2 + \lambda_2 x_2^2$.

Donc $N_{22} = 2$.

2° $n = 3$.

On a les six types suivants :

(*c*) $\lambda_1 2x_1x_2 + \lambda_2 2x_2x_3$,

(*d*) $\lambda_1(x_1^2 + x_3^2) + \lambda_2(x_2^2 + x_3^2)$,

(*e*) $\lambda_1(x_1^2 + x_2^2) + \lambda_2 x_3^2$,

(*f*) $\lambda_1 2x_1x_2 + \lambda_2(x_2^2 + x_3^2)$,

(*g*) $\lambda_1(2x_1x_2 + x_3^2) + \lambda_2 x_2^2$,

(*h*) $\lambda_1(2x_1x_2 + x_3^2) + \lambda_2 2x_2x_3$,

d'où $N_{23} = 6$.

3° $n = 4$.

On aura quatorze types :

$$\begin{array}{ll}
\lambda_1(x_1^2 + x_3^2 + x_4^2) & + \lambda_2(x_2^2 + x_3^2 + s x_4^2), \\
\lambda_1(x_1^2 + x_2^2 + x_4^2) & + \lambda_2(x_3^2 + x_4^2), \\
\lambda_1(2x_1x_2 + x_4^2) & + \lambda_2(x_2^2 + x_3^2 + x_4^2), \\
\lambda_1(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) & + \lambda_2 x_4^2, \\
\lambda_1(x_1^2 + x_2^2) & + \lambda_2(x_3^2 + x_4^2), \\
\lambda_1(2x_1x_2 + x_3^2) & + \lambda_2(x_2^2 + x_4^2), \\
\lambda_1(x_1^2 + x_2^2 + x_4^2) & + \lambda_2\, 2x_3x_4, \\
\lambda_1(2x_1x_2 + x_3^2) & + \lambda_2(2x_2x_3 + x_4^2), \\
\lambda_1(2x_1x_2 + x_4^2) & + \lambda_2(x_2^2 + 2x_3x_4), \\
\lambda_1(2x_1x_2 + x_4^2) & + \lambda_2\, 2x_2x_3, \\
\lambda_1(2x_1x_2 + x_3^2 + x_4^2) & + \lambda_2 x_2^2, \\
\lambda_1(2x_1x_2 + x_3^2 + x_4^2) & + \lambda_2\, 2x_2x_3, \\
\lambda_1(2x_1x_2 + 2x_3x_4) & + \lambda_2(x_2^2 + x_4^2), \\
\lambda_1(2x_1x_2 + 2x_3x_4) & + \lambda_2(2x_2x_3 + x_4^2).
\end{array}$$

Donc $N_{24} = 14$.
On trouverait de même $N_{25} = 29$, etc.

§ II. — Réduction des réseaux de formes quadratiques ternaires.

11. Soit $R = \lambda_1\varphi_1 + \ldots + \lambda_m\varphi_m$ un réseau dérivé de m formes $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ des trois variables x_1, x_2, x_3. Nous avons trouvé précédemment (nos **2** et **10**)

$$N_{m3} = 0 \quad \text{si} \quad m > 6, \qquad N_{63} = 1, \qquad N_{13} = 1, \qquad N_{23} = 6.$$

Il ne reste donc à examiner que les trois cas suivants : $m = 3, 4, 5$.

Premier cas : $m = 3$.

12. Soit

$$R = \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \lambda_3 \varphi_3.$$

Une substitution linéaire opérée sur les λ revient évidemment à remplacer φ_1, φ_2, φ_3 par de nouvelles formes génératrices, combinaisons linéaires des précédentes.

A chaque système de valeurs des λ (ou plutôt de leurs rapports) correspond une forme du réseau (définie à un facteur près), laquelle, égalée à zéro, représentera une conique. Pour abréger le langage nous appellerons celle-ci la *conique du point* $P = (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)$.

Son déterminant Δ est homogène et du troisième degré en λ_1, λ_2, λ_3. Le lieu des points P dont la conique est décomposable en deux droites sera donc une cubique $\Delta = 0$. Si tous les mineurs de Δ s'annulent, ces deux droites se confondront et le réseau contiendra une droite double; mais ce cas sera exceptionnel, car pour qu'il se présente il faut satisfaire à trois conditions, et l'on ne dispose que de deux indéterminées, $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3$.

Soient P_1, P_2 deux points quelconques du plan des λ; ψ_1, ψ_2 les coniques correspondantes. Aux divers points de la droite $\varpi = P_1 P_2$ correspondront évidemment les coniques du faisceau

$$F = l_1 \psi_1 + l_2 \psi_2,$$

que nous appellerons le *faisceau de la droite* ϖ.

Si les dérivées partielles $\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3}$ peuvent s'exprimer par moins de trois fonctions des x linéairement distinctes, les variables x pourront être choisies de telle sorte que l'une d'elles ait disparu des expressions de ψ_1 et de ψ_2. Le faisceau F sera donc réductible à l'une des deux formes (a) ou (b) du n° **10**.

Si au contraire F dépend de toutes les variables x, il sera réductible à l'un des six types (c), ..., (h) du même numéro.

Les points d'intersection de la droite ϖ avec la cubique Δ correspondent à celles des formes du faisceau F dont le déterminant est nul. Cette condition s'exprime par une équation homogène du troisième degré en λ_1, λ_2.

Si F est de l'une des formes (a), (b), (c), le premier membre de cette équation est identiquement nul. Si donc le réseau R contient un faisceau F de l'une de ces trois formes, la droite $\mathfrak{D}$ qu'il caractérise appartiendra tout entière à la cubique Δ, qui sera décomposable. (On pourra même avoir identiquement $\Delta = 0$, auquel cas la cubique contiendra tous les points et toutes les droites du plan.)

Si F est de la forme (d), le premier membre de l'équation se réduit à $\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2)$; la droite D coupera donc la cubique en trois points distincts.

Enfin, ce premier membre se réduira à $\lambda_1^2\lambda_2$, si F est de l'une des formes (e), (f); à λ_1^3 s'il est de l'une des formes (g), (h); deux ou trois des points d'intersection seront ainsi confondus en un seul.

13. Ces préliminaires posés, pour opérer la réduction du réseau R à sa forme canonique, nous prendrons pour côtés λ_1, λ_2, λ_3 du triangle de référence (et spécialement pour λ_3) des droites ayant une relation invariante avec la cubique Δ.

1° Ainsi, si Δ est indécomposable, et n'a pas de point de rebroussement, il existera au moins trois points d'inflexion, situés sur une même droite. On la prendra pour λ_3; et pour λ_1 et λ_2 les tangentes à deux de ces points d'inflexion;

2° Si Δ est indécomposable, mais a un point de rebroussement P, elle aura un point d'inflexion Q; on prendra pour λ_3 la droite PQ, pour λ_1 et λ_2 les tangentes à Δ aux points Q et P;

3° Si Δ est décomposable, elle aura au moins un facteur linéaire. Elle pourra en avoir plusieurs distincts (ou même une infinité, si Δ est identiquement nul). Nous choisirons pour λ_3 celle des droites représentées par ces facteurs dont le faisceau est le plus simple [en convenant de considérer un faisceau du type (a) comme plus simple qu'un faisceau du type (b), celui-ci comme plus simple qu'un faisceau du type (c)].

Examinons successivement ces divers cas :

14. 1° *Δ est indécomposable et sans rebroussement.* — La droite λ_3 coupant Δ en trois points distincts, son faisceau sera du type (d)

$$F = \lambda_1(x_1^2 + x_3^2) + \lambda_2(x_2^2 + x_3^2)$$

ou en changeant x_3 en ix_3, λ_2 en $-\lambda_2$, pour plus de symétrie

$$F = \lambda_1(x_1^2 - x_3^2) + \lambda_2(x_3^2 - x_2^2) = \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2.$$

Il contient trois formes à déterminant nul

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad -(\varphi_1 + \varphi_2) = x_2^2 - x_1^2$$

correspondant respectivement aux trois points d'inflexion P_1, P_2, P_3 situés sur λ_3.

Soit

$$\varphi_3 = \Sigma a_{ik} x_i x_k \qquad (a_{ik} = a_{ki})$$

la troisième forme génératrice du réseau

$$R = \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \lambda_3\varphi_3.$$

On aura

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}\lambda_3 + \lambda_1 & a_{21}\lambda_3 & a_{31}\lambda_3 \\ a_{12}\lambda_3 & a_{22}\lambda_3 - \lambda_2 & a_{32}\lambda_3 \\ a_{13}\lambda_3 & a_{23}\lambda_3 & a_{33}\lambda_3 - \lambda_1 + \lambda_2 \end{vmatrix}.$$

Mais, λ_1, λ_2 étant des tangentes d'inflexion, Δ doit se réduire à la forme

$$A\lambda_3^3 + \lambda_1\lambda_2(B\lambda_1 + C\lambda_2 + D\lambda_3),$$

et par suite être privé des termes en $\lambda_1^2\lambda_3$, $\lambda_2^2\lambda_3$, $\lambda_1\lambda_3^2$, $\lambda_2\lambda_3^2$. Il en résulte les équations de condition

$$a_{11} = 0, \qquad a_{22} = 0,$$

puis

$$a_{12}a_{21} = a_{23}a_{32} = a_{31}a_{13}.$$

Les coefficients a_{12}, a_{23}, a_{31} sont donc égaux au signe près. On peut d'ailleurs les ramener au même signe (sans changer les expressions de φ_1, φ_2) en changeant

$$x_1, x_2, x_3, \varphi_3 \quad \text{en} \quad \varepsilon_1 x_1, \varepsilon_2 x_2, \varepsilon_3 x_3, \varepsilon\varphi_3,$$

les ε étant des unités positives ou négatives convenablement choisies.

Soit a la valeur commune de ces coefficients. Elle ne peut être nulle, car Δ se réduisant à

$$\lambda_1\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2-a_{33}\lambda_3)$$

ne serait pas indécomposable.

Changeant donc φ_3 en $\frac{1}{a}\varphi_3$, on réduira ces trois coefficients à l'unité, le dernier deviendra $\frac{a_{33}}{a}$. Désignant cette quantité par σ, nous aurons pour φ_3 l'expression réduite suivante :

$$\varphi_3 = 2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)+\sigma x_3^2.$$

Les réseaux où Δ est indécomposable se ramènent donc à un type unique

$$(1)\quad \lambda_1(x_1^2-x_3^2)+\lambda_2(x_3^2-x_2^2)+\lambda_3(2x_1x_2+2x_2x_3+2x_3x_1+\sigma x_3^2)$$

contenant un invariant σ.

15. Ce même type renferme également d'autres réseaux ; car on a

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 & \lambda_3 \\ \lambda_3 & -\lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_3 & \lambda_3 & \sigma\lambda_3-\lambda_1+\lambda_2 \end{vmatrix} = (2-\sigma)\lambda_3^3-\lambda_1\lambda_2(\sigma\lambda_3-\lambda_1+\lambda_2)$$

et, pour la valeur particulière $\sigma=2$, cette cubique devient le produit des trois droites non concourantes λ_1, λ_2, $2\lambda_3-\lambda_1+\lambda_2$.

Ces trois droites sont d'ailleurs de l'espèce (c). Considérons, en effet, la troisième, par exemple ; elle aura pour faisceau

$$(2\lambda_3+\lambda_2)\varphi_1+\lambda_2\varphi_2+\lambda_3\varphi_3=\lambda_2(\varphi_2+\varphi_1)+\lambda_3(\varphi_3+2\varphi_1).$$

Or les dérivées partielles

$$\frac{\partial(\varphi_2+\varphi_1)}{\partial x_1}=2x_1,\quad \frac{\partial(\varphi_2+\varphi_1)}{\partial x_2}=-2x_2,\quad \frac{\partial(\varphi_3+2\varphi_1)}{\partial x_3}=2x_1+2x_2+2x_3$$

sont linéairement distinctes.

Or, nous verrons plus loin que tous les réseaux où Δ est formé de trois droites non concourantes de l'espèce (c) sont réductibles à une même expression canonique, qui pourra réciproquement être transformée dans la précédente (pour la valeur particulière $\sigma = 2$).

Le nouveau type que nous trouverons rentre donc comme cas particulier dans le type à invariant que nous venons de trouver. Mais il est beaucoup plus simple, et correspond d'ailleurs à une propriété invariante du réseau. Nous le conserverons donc dans notre énumération, en introduisant dans la définition du type actuel la restriction

$$\sigma \gtrless 2.$$

16. Quelques autres cas particuliers méritent d'être signalés :

1° Si $\sigma = 0$, les trois tangentes d'inflexion sont concourantes;

2° Le réseau contiendra une conique dégénérée en une droite double, si l'on peut déterminer les rapports $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3$ de telle sorte que les mineurs de Δ soient tous nuls.

Cela donne entre autres équations de condition les suivantes :

$$\lambda_3(\lambda_3 + \lambda_2) = 0, \qquad \lambda_1\lambda_2 + \lambda_3^2 = 0.$$

Mais λ_3 ne peut être nul, car on aurait dans cette hypothèse

$$\lambda_1\lambda_2 = 0, \qquad \lambda_1(-\lambda_1 + \lambda_2) = 0, \qquad \lambda_2(-\lambda_1 + \lambda_2) = 0;$$

d'où $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, solution inacceptable.

Donc

$$\lambda_3 = -\lambda_2 = \lambda_1.$$

Les équations de condition se réduiront alors à une seule

$$\begin{vmatrix} \lambda_3 & \lambda_3 \\ \lambda_3 & (\sigma - 2)\lambda_3 \end{vmatrix} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \sigma = 3.$$

3° Δ aura un point double, si l'on peut satisfaire aux relations

$$\frac{\partial\Delta}{\partial\lambda_1} = -\lambda_2(\sigma\lambda_3 - 2\lambda_1 + \lambda_2) = 0,$$

$$\frac{\partial\Delta}{\partial\lambda_2} = -\lambda_1(\sigma\lambda_3 - \lambda_1 + 2\lambda_2) = 0,$$

$$\frac{\partial\Delta}{\partial\lambda_3} = 3(2 - \sigma)\lambda_3^2 - \sigma\lambda_1\lambda_2 = 0.$$

Ni λ_1 ni λ_2 ne peuvent être nuls, car on en déduirait $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Il faut donc supposer

$$\sigma\lambda_3 - 2\lambda_1 + \lambda_2 = \sigma\lambda_3 - \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0,$$

d'où

$$\lambda_2 = -\lambda_1 = -\frac{\sigma}{3}\lambda_3.$$

Substituant ces valeurs dans la dernière équation, il vient

$$\sigma^3 + 27(2 - \sigma) = 0,$$

d'où $\sigma = 3$ ou $\sigma = -6$.

17. La réduction du réseau à sa forme canonique pourra s'opérer d'autant de manières différentes qu'il y a de couples de points d'inflexion, soit $\frac{9.8}{2} = 36$ dans le cas général, soit $\frac{3.2}{2} = 3$ si Δ a un point double. On devrait donc s'attendre à trouver autant de valeurs différentes de l'invariant σ qu'il existe de couples de points d'inflexion.

Mais on voit aisément que cet invariant conserve sa valeur pour les trois couples qu'on peut former avec trois points d'inflexion P_1, P_2, P_3 situés sur une même droite.

Changeons, en effet, le rôle des deux points P_2, P_3. A l'ancien triangle de référence λ_3, λ_2, λ_1, nous en substituons un nouveau, formé de la droite λ_3, et des tangentes λ_2 et $\sigma\lambda_3 - \lambda_1 + \lambda_2$ aux points P_1 et P_3. Les formes du réseau correspondant aux nouveaux sommets seront respectivement

$$\varphi_1' = \varphi_1 = x_1^2 - x_3^2, \qquad \varphi_2' = \varphi_1 + \varphi_2 = x_1^2 - x_2^2,$$
$$\varphi_3' = \varphi_3 + \sigma\varphi_1 = 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) + \sigma x_1^2.$$

Or, si nous échangeons x_1, x_3, et si nous changeons en même temps le signe de φ_1', nous retrouvons les expressions qu'avaient φ_1, φ_2, φ_3, l'invariant σ restant le même.

Cet invariant n'a donc qu'une valeur unique si Δ a un point double. Il peut en avoir douze si Δ est une cubique générale.

18. 2° Δ *est indécomposable, mais possède un point de rebrous-*

sement P *et un point d'inflexion* Q. — Les droites λ_1, λ_2 étant respectivement les tangentes à Δ aux points Q et P, Δ sera de la forme

$$(1) \qquad A\lambda_3^3 + B\lambda_1^2\lambda_2 \qquad (A \text{ et } B \gtrless 0).$$

D'autre part, λ_3 rencontrant Δ en deux points confondus en $P = (\lambda_2\lambda_3)$ et au point $Q = (\lambda_1\lambda_3)$, son faisceau F appartiendra à l'un des deux types (e) ou (f). Examinons successivement ces deux hypothèses :

Si F est de l'espèce (e), il sera réductible à la forme

$$F = \lambda_1(x_1^2 + x_2^2) + \lambda_2 x_3^2,$$

ou, en prenant pour variables indépendantes $x_1 + ix_2$ et $\frac{1}{2}(x_1 - ix_2)$ au lieu de x_1, x_2, à la forme équivalente

$$F = \lambda_1 \, 2x_1x_2 + \lambda_2 x_3^2.$$

Soit

$$\varphi_3 = \sum a_{ik}x_ix_k$$

la troisième forme génératrice du réseau R. On aura

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}\lambda_3 & a_{12}\lambda_3 + \lambda_1 & a_{13}\lambda_3 \\ a_{21}\lambda_3 + \lambda_1 & a_{22}\lambda_3 & a_{23}\lambda_3 \\ a_{31}\lambda_3 & a_{32}\lambda_3 & a_{33}\lambda_3 + \lambda_2 \end{vmatrix},$$

expression à identifier avec $A\lambda_3^3 + B\lambda_1^2\lambda_2$.

La comparaison des termes en $\lambda_1^2\lambda_3$ et en λ_2 donnera

$$a_{33} = 0, \qquad a_{12} + a_{21} = 0,$$

d'où $a_{12} = a_{21} = 0$,

$$a_{11}a_{22} = 0.$$

Mais on peut, sans altérer F, permuter x_1 avec x_2, ce qui échange a_{11} et a_{22}. On peut donc admettre que a_{22} est nul.

La comparaison des autres termes donnera ensuite

$$a_{23}a_{31} + a_{32}a_{13} = 2a_{23}a_{13} = 0, \qquad a_{11}a_{23}a_{32} = a_{11}a_{23}^2 \gtrless 0.$$

Donc $a_{13} = a_{31}$ sera nul; a_{11} et $a_{23} = a_{32}$ seront $\gtrless$ o. Par suite, φ_3 se réduira à la forme

$$\varphi_3 = a_{11} x_1^2 + 2 a_{23} x_2 x_3,$$

a_{11} et a_{23} n'étant pas nuls.

On pourra les réduire à l'unité en changeant x_1, x_2, λ_1 en $\frac{x_1}{\sqrt{a_{11}}}$, $\frac{x_2}{a_{23}}$, $a_{23}\sqrt{a_{11}}\,\lambda_1$. On obtient ainsi le type réduit

$$\text{(II)} \qquad \mathrm{R} = \lambda_1\, 2 x_1 x_2 + \lambda_2 x_3^2 + \lambda_3 (x_1^2 + 2 x_2 x_3).$$

Toutes les coniques de ce réseau ont un point commun $x_1 = x_3 = 0$. L'une d'elles se réduit à une droite double : c'est celle du point $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$.

19. Supposons maintenant que F soit de l'espèce (f)

$$\mathrm{F} = \lambda_1\, 2 x_1 x_2 + \lambda_2 (x_2^2 + x_3^2)$$

et soit

$$\varphi_3 = \sum a_{ik} x_i x_k.$$

On aura

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}\lambda_3 & a_{12}\lambda_3 + \lambda_1 & a_{13}\lambda_3 \\ a_{21}\lambda_3 + \lambda_1 & a_{22}\lambda_3 + \lambda_2 & a_{23}\lambda_3 \\ a_{31}\lambda_3 & a_{32}\lambda_3 & a_{33}\lambda_3 + \lambda_2 \end{vmatrix}.$$

L'identification avec $\mathrm{A}\lambda_3^3 + \mathrm{B}\lambda_1^2\lambda_2$ donnera successivement

$$a_{33} = 0, \qquad a_{11} = 0, \qquad a_{12} + a_{21} = 0,$$

d'où $a_{12} = a_{21} = 0$,

$$a_{32} a_{13} + a_{31} a_{23} = 0, \qquad a_{31} a_{13} a_{22} \gtrless 0,$$

d'où

$$a_{31} = a_{13} \gtrless 0, \qquad a_{22} \gtrless 0, \qquad a_{32} = a_{23} = 0.$$

Donc φ_3 se réduit à

$$2 a_{13} x_1 x_3 + a_{22} x_2^2.$$

En changeant x_1, λ_1, λ_3 en $\frac{a_{22}}{a_{13}}x_1$, $\frac{a_{13}}{a_{22}}\lambda_1$, $\frac{1}{a_{22}}\lambda_3$, on réduira les coefficients a_{13}, a_{22} à l'unité, et l'on aura

$$\text{(III)} \qquad R = \lambda_1\, 2x_1x_2 + \lambda_2(x_2^2 + x_3^2) + \lambda_3(2x_1x_3 + x_2^2).$$

Ici encore toutes les coniques du réseau ont un point commun $x_2 = x_3 = 0$. Mais aucune d'elles ne se réduit à une droite double.

20. 3° *Δ est décomposable (ou nul) et admet au moins un facteur linéaire de l'espèce (a).* — On aura

$$F = \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2.$$

Si toutes les coniques du réseau R n'ont pas de point commun, φ_3 contiendra un terme en x_3^2, et par le changement de la variable x_3 pourra être ramenée à la forme

$$x_3^2 + ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2.$$

On peut remplacer φ_3 comme forme génératrice par

$$\varphi_3 - a\varphi_1 - c\varphi_2 = x_3^2 + 2bx_1x_2.$$

Si b n'est pas nul, on pourra le rendre égal à 1 en changeant x_1, λ_1 en $\frac{x_1}{b}$, $b^2\lambda_1$. Il viendra

$$\text{(IV)} \qquad R = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3(x_3^2 + 2x_1x_2).$$

Ici

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 & 0 \\ \lambda_3 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix} = \lambda_3(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_3^2)$$

représente une droite et une conique qui se coupent.

Ses mineurs ne s'annulent que si $\lambda_3 = 0$ et $\lambda_1\lambda_2 = 0$. Le réseau ne contient donc de formes qui soient des carrés parfaits que les deux qui sont en évidence.

Si b est nul, on a une autre expression réduite

$$(\mathrm{V}) \qquad \mathrm{R} = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2;$$

$\Delta = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ représente trois droites de l'espèce (a) non concourantes.

R contient trois formes x_1^2, x_2^2, x_3^2 qui sont des carrés parfaits.

21. Si toutes les coniques du réseau ont un point commun $x_1 = x_2 = 0$, φ_3 se réduit à la forme

$$2(ax_3x_1 + bx_3x_2 + cx_1x_2) + dx_1^2 + ex_2^2.$$

Les coefficients a et b ne sont pas nuls à la fois, car x_3 doit figurer dans l'expression de R. D'ailleurs, en permutant λ_1, x_1 avec λ_2, x_2, a et b s'échangent entre eux; on peut donc supposer $a \gtrless 0$.

Nous ferons alors disparaître le terme en $x_1 x_2$ en changeant x_3 en $x_3 - \frac{c}{a} x_1$, puis les termes en x_1^2, x_2^2 en changeant la troisième forme génératrice. Changeant enfin λ_1, x_1 en $a^2\lambda_1$, $\frac{x_1}{a}$, on rendra a égal à 1; et de même pour b, s'il n'est pas nul.

Nous obtenons ainsi deux nouveaux types réduits :

$$(\mathrm{VI}) \qquad \mathrm{R} = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3\, 2(x_1 + x_2)x_3,$$

$$(\mathrm{VII}) \qquad \mathrm{R} = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3\, 2x_1 x_3.$$

Dans l'un et l'autre

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \lambda_3 \\ 0 & \lambda_2 & b\lambda_3 \\ \lambda_3 & b\lambda_3 & 0 \end{vmatrix} = -\lambda_3^2(\lambda_2 + b^2\lambda_1)$$

est formé d'une droite double et d'une droite simple. Cette dernière est de l'espèce (c) pour le type (VI) et de l'espèce (b) pour le type (VII).

Un autre caractère invariant distingue ces deux types. Les coniques du réseau (VI) ont entre elles, au point $x_1 = x_2 = 0$, un contact du premier ordre. Dans le type (VII), le contact est du second ordre.

22. 4° *Δ est décomposable (ou nul). Son facteur linéaire le plus simple est de l'espèce (b).* — On aura

$$F = \lambda_1 2x_1 x_2 + \lambda_2 x_2^2.$$

Si φ_3 contient un terme en x_3^2, on pourra, par le changement de la variable x_3, la réduire à la forme

$$x_3^2 + a x_1^2 + 2b x_1 x_2 + c x_2^2.$$

Par le changement de forme génératrice, on fera disparaître les termes en x_2^2, $x_1 x_2$; il restera

$$\varphi_3 = x_3^2 + a x_1^2.$$

Le coefficient a n'est pas nul; car le réseau contiendrait la droite λ_1 dont le faisceau

$$\lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2,$$

étant de l'espèce (a), serait plus simple que celui de la droite λ_3. Changeant d'ailleurs x_1, λ_1, en $\frac{x_2}{\sqrt{a}}$, $\sqrt{a}\lambda_1$, on réduira ce coefficient à l'unité; d'où le nouveau type

$$\text{(VIII)} \qquad R = \lambda_1 2x_1 x_2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 (x_1^2 + x_3^2).$$

Ici

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_3 & \lambda_1 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix} = \lambda_3(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_1^2)$$

représente une droite et une conique tangentes entre elles.

Les diverses coniques du réseau R ont en commun les deux points

$$x_2 = x_1 \pm i x_3 = 0.$$

23. Si φ_3 ne contient pas x_3^2, elle sera de la forme

$$2x_3(a x_1 + b x_2) + c x_1^2 + 2d x_1 x_2 + e x_2^2.$$

Supposons d'abord que a soit $\gtrless 0$. Par le changement de x_1, λ_2 en $x_1 - \frac{b}{a}x_2$, $\lambda_2 + \frac{2b}{a}\lambda_1$, on fera disparaître le coefficient b; puis, par le changement de la variable x_3, on réduira $2ax_1x_3 + cx_1^2$ à $2x_1x_3$; enfin, par le changement de la dernière forme génératrice, on fera disparaître d et e. On aura finalement

$$\text{(IX)} \qquad R = \lambda_1 2x_1x_2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 2x_1x_3.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \lambda_1 & \lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & 0 \\ \lambda_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\lambda_2\lambda_3^2$$

représente une droite double λ_3 et une droite simple λ_2, cette dernière du type (c).

Les coniques de ce réseau ont deux points communs $x_2 = x_1 = 0$ et $x_2 = x_3 = 0$.

Soit enfin $a = 0$; b ne sera pas nul, car φ_3 doit contenir x_3. Changeant cette forme génératrice, on réduira son expression à

$$2bx_2x_3 + cx_1^2.$$

Par le changement de x_3 en $\frac{x_3}{b}$, on réduira b à l'unité. Si c n'est pas nul, on le réduira aussi à l'unité en changeant x_1, λ_1 en $\frac{x_1}{\sqrt{c}}$, $\sqrt{c}\lambda_1$.

Pour $c = 1$, on aura le réseau-type

$$\text{(X)} \qquad \lambda_1 2x_1x_2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3(2x_2x_3 + x_1^2)$$

pour lequel

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_3 & \lambda_1 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 0 & \lambda_3 & 0 \end{vmatrix} = -\lambda_3^3$$

représente une droite triple.

Les coniques de ce réseau sont toutes tangentes entre elles au point $x_1 = x_2 = 0$.

Pour $c = 0$, on aura un autre type

$$(\text{XI}) \qquad \lambda_1 2x_1x_2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 2x_2x_3$$

pour lequel

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \lambda_1 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 0 & \lambda_3 & 0 \end{vmatrix}$$

est identiquement nul. Toutes ses coniques sont décomposables et ont une droite commune $x_2 = 0$.

Chacun des réseaux (VIII) à (XI) contient d'ailleurs parmi ses coniques une droite double $x_2^2 = 0$.

24. 5° Δ *est décomposable; ses facteurs linéaires sont tous de l'espèce* (c). — On peut, sans altérer l'expression

$$F = \lambda_1 2x_1x_2 + \lambda_2 2x_2x_3,$$

opérer une substitution linéaire arbitraire sur x_1, x_3, à la condition d'effectuer en même temps la substitution inverse sur λ_1, λ_3.

Ceci permettra, dans l'expression de φ_3, qui peut s'écrire

$$\varphi_3 = f(x_1, x_3) + 2ax_1x_2 + 2bx_3x_2 + cx_2^2,$$

de ramener la forme binaire $f(x_1, x_2)$, si elle n'est pas nulle, à $2x_1x_3$ ou à x_1^2. En changeant la dernière forme génératrice, on peut faire disparaître a et b. Enfin, si c n'est pas nul, on le ramène à l'unité en changeant x_2, λ_1, λ_2 en $\frac{x_2}{\sqrt{c}}$, $\sqrt{c}\lambda_1$, $\sqrt{c}\lambda_2$.

Mais, parmi les six expressions réduites ainsi obtenues pour φ_3, on doit rejeter toutes celles où x_3 ne figure pas; car cette variable ne figurerait pas dans le faisceau $\lambda_1\varphi_1 + \lambda_3\varphi_3$ et la droite correspondante λ_2 serait donc un facteur de Δ, de l'espèce (a) ou (b).

Restent donc deux solutions seulement :

$$\varphi_3 = 2x_1x_3 + x_2^2, \qquad \varphi_3 = 2x_1x_3..$$

Pour la première,

(XII) $$R = \lambda_1 2x_1x_2 + \lambda_2 2x_2x_3 + \lambda_3(2x_1x_3 + x_2^2).$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \lambda_1 & \lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_2 & 0 \end{vmatrix} = \lambda_3(2\lambda_1\lambda_2 - \lambda_3^2)$$

représente une droite et une conique qui se coupent. Les coniques du réseau ont deux points communs :

$$x_2 = x_1 = 0, \qquad x_2 = x_3 = 0.$$

Pour la seconde,

(XIII) $$R = \lambda_1 2x_1x_2 + \lambda_2 2x_2x_3 + \lambda_3 2x_1x_3.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \lambda_1 & \lambda_3 \\ \lambda_1 & 0 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_2 & 0 \end{vmatrix} = 2\lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

représente trois droites non concourantes, d'espèce (c).

Ce dernier type pourrait être ramené à un cas particulier du type I, comme il a été dit au nº **15**.

25. Le Tableau suivant résume les résultats de la discussion précédente :

N^os des types.	FORMES GÉNÉRATRICES. φ_1.	φ_2.	φ_3.	NATURE DE Δ.	RELATIONS entre les facteurs de Δ	RELATIONS entre les coniques du réseau.	NOMBRE des droites doubles.
I....	$x_1^2 - x_3^2$	$x_3^2 - x_2^2$	$2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_1 + \sigma x_3^2$, $\sigma \gtrless 2$	Indécomposable, sans rebroussement.	″	″	o en général. 1 si $\sigma = 3$.
II...	$2x_1x_2$	x_3^2	$x_1^2 + 2x_2x_3$	Indécomposable, un rebroussement.	″	Un point commun.	1
III..	$2x_1x_2$	$x_2^2 + x_3^2$	$2x_1x_3 + x_2^2$	Indécomposable, un rebroussement.	″	Un point commun.	0
IV...	x_1^2	x_2^2	$x_3^2 + 2x_1x_2$	Droite (a), conique.	Sécantes.	″	2
V....	x_1^2	x_2^2	x_3^2	Trois droites (a).	Non concourantes.	″	3
VI...	x_1^2	x_2^2	$2x_1x_3 + 2x_2x_3$	Droite double (a). Droite simple (c).	″	Deux points communs confondus.	2
VII..	x_1^2	x_2^2	$2x_1x_3$	Droite double (a). Droite simple (b).	″	Trois points communs confondus.	2
VIII.	$2x_1x_2$	x_2^2	$x_1^2 + x_3^2$	Droite (b), conique.	Tangentes.	Deux points communs.	1
IX...	$2x_1x_2$	x_3^2	$2x_1x_3$	Droite double (b). Droite simple (c).	″	Deux points communs.	1
X....	$2x_1x_2$	x_3^2	$2x_2x_3 + x_1^2$	Droite triple (b).	″	Deux points communs confondus.	1
XI...	$2x_1x_2$	x_2^2	$2x_2x_3$	Nul.	″	Une droite commune	1
XII..	$2x_1x_2$	$2x_2x_3$	$2x_1x_3 + x_2^2$	Droite (c), conique.	Sécantes.	Deux points communs.	0
XIII.	$2x_1x_2$	$2x_2x_3$	$2x_1x_3$	Trois droites (c).	Non concourantes.	Trois points communs.	0

Deuxième cas : $m = 4$.

26. Parmi les coniques du réseau

$$R = \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \lambda_3\varphi_3 + \lambda_4\varphi_4,$$

il en est une au moins dégénérée en droite double. Car cette condition s'exprime par trois équations homogènes entre les quatre inconnues

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3, \quad \lambda_4.$$

Nous classerons les réseaux à étudier d'après le nombre de leurs droites doubles.

27. *Première hypothèse :* R *contient (au moins) trois droites doubles non concourantes*

$$\varphi_1 = x_1^2, \qquad \varphi_2 = x_2^2, \qquad \varphi_3 = x_3^2.$$

Soit ψ une quatrième forme de R ; en la combinant linéairement avec les précédentes, on obtiendra une nouvelle forme φ_4 débarrassée des carrés des variables

$$\varphi_4 = 2(ax_1x_2 + bx_2x_3 + cx_3x_1).$$

Changeons x_1, x_2, x_3, φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 en t_1x_1, t_2x_2, t_3x_3, $\frac{\varphi_1}{t_1^2}$, $\frac{\varphi_2}{t_2^2}$, $\frac{\varphi_3}{t_3^2}$, $\frac{\varphi_4}{t_1t_2t_3}$. Les coefficients a, b, c seront changés en $\frac{a}{t_3}$, $\frac{b}{t_1}$, $\frac{c}{t_2}$ et en choisissant convenablement les facteurs t_1, t_2, t_3 on pourra rendre égaux à 1 ceux de ces coefficients qui ne sont pas nuls.

D'ailleurs, φ_4 n'étant pas identiquement nul, a, b, c ne sont pas nuls à la fois. Enfin, l'échange des variables x_1, x_2, x_3 les permute entre eux. Il ne reste donc que trois hypothèses réellement distinctes

$$a = 1 \begin{cases} b = 1, & c = 1, \\ b = 1, & c = 0, \\ b = 0, & c = 0; \end{cases}$$

d'où trois types de réseaux réduits :

(I) $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + \lambda_4 . 2(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1)$,

(II) $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + \lambda_4 . 2(x_1 x_2 + x_2 x_3)$,

(III) $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + \lambda_4 . 2 x_1 x_2$.

Les types (I) et (II) ne contiennent que les trois droites doubles x_1^2, x_2^2, x_3^2. Mais le type (III) en contient une infinité de la forme $(\alpha x_1 + \beta x_2)^2$, outre la droite x_3^2.

28. *Deuxième hypothèse : R contient trois droites doubles concourantes*, x_1^2, x_2^2, $(a x_1 + b x_2)^2$.

De la combinaison de ces trois formes, on déduit les formes génératrices

$$\varphi_1 = x_1^2, \qquad \varphi_2 = x_2^2, \qquad \varphi_3 = 2 x_1 x_2$$

et R contiendra une infinité de droites doubles, de la forme générale

$$(\alpha x_1 + \beta x_2)^2.$$

1° Supposons que, parmi les formes de R, il en existe une ψ qui contienne un terme en x_3^2. Par le changement de la variable x_3, on pourra la réduire à la forme

$$x_3^2 + a x_1^2 + 2 b x_1 x_2 + c x_2^2$$

et R contiendra la nouvelle droite double

$$\psi - a\varphi_1 - b\varphi_3 - c\varphi_2 = x_3^2$$

qui n'est pas concourante avec x_1^2, x_2^2. On retombe ainsi sur le type III déjà trouvé.

2° Si ψ ne contient pas x_3^2, elle sera de la forme

$$a x_1^2 + 2 b x_1 x_2 + c x_2^2 + 2(d x_1 + e x_2) x_3$$

et R contiendra la forme

$$\varphi_4 = \psi - a\varphi_1 - b\varphi_3 - c\varphi_2 = 2(d x_1 + e x_2) x_3.$$

Mais on peut opérer sur x_1, x_2 une substitution linéaire quelconque sans altérer l'expression du réseau dérivé de x_1^2, x_2^2, $2x_1x_2$. On pourra ainsi réduire $dx_1 + ex_2$ à x_1; d'où le type réduit

$$\text{(IV)} \qquad \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 . 2x_1x_2 + \lambda_4 . 2x_1x_3.$$

Toutes les coniques de ce réseau ont un point commun $x_1 = x_2 = 0$, et ont même tangente en ce point.

29. *Troisième hypothèse :* R *ne contient que les deux droites doubles*

$$\varphi_1 = x_1^2, \qquad \varphi_2 = x_2^2.$$

1° Si R contient une forme ψ_3 où figure un terme en x_3^2, on pourra ramener son expression à

$$\psi_3 = x_3^2 + ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$$

et, en la combinant avec φ_1, φ_2, on aura la forme plus simple

$$\varphi_3 = x_3^2 + 2bx_1x_2.$$

Soit ψ_4 une dernière forme de R ; en la combinant aux précédentes, on obtiendra une forme

$$\varphi_4 = \alpha x_1x_2 + \beta x_3x_1 + \gamma x_2x_3.$$

Considérons la forme

$$\varphi_3 + s\varphi_4 + t\varphi_1 + u\varphi_2 = tx_1^2 + ux_2^2 + x_3^2 + 2(b + s\alpha)x_1x_2 + s\beta x_3x_1 + s\gamma x_2x_3.$$

Ce sera une droite double, si l'on a les trois équations

$$(b + s\alpha)^2 = tu,$$
$$s\beta = t,$$
$$s\gamma = u,$$

dont les deux dernières déterminent t, u, pourvu que s le soit par

l'équation

$$(b + s\alpha)^2 = \beta\gamma s^2.$$

Mais, R ne contenant par hypothèse que deux droites doubles, cette dernière équation doit être impossible ; d'où l'on déduit

$$b \gtrless 0, \qquad \alpha = 0, \qquad \beta\gamma = 0.$$

D'ailleurs β et γ s'échangent entre eux par l'échange de x_1 avec x_2. On peut donc supposer $\beta = 0$; quant à γ il ne peut être nul en même temps, car φ_4 serait identiquement nul. On aura donc

$$\varphi_3 = x_3^2 + 2bx_1x_2, \qquad \varphi_4 = 2\gamma x_2 x_3.$$

Changeant enfin x_1, φ_1, φ_4 en $\frac{1}{b}x_1$, $b^2\varphi_1$, $\frac{\varphi_4}{\gamma}$, on réduira b et γ à l'unité ; d'où le type réduit

$$\text{(V)} \qquad \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3(x_3^2 + 2x_1x_2) + \lambda_4 . 2x_2x_3.$$

50. 2° Si aucune des formes de R ne contient de terme en x_3^2, R sera dérivé de φ_1, φ_2 et de deux nouvelles formes génératrices

$$\psi_3 = 2(b_3x_1x_2 + c_3x_1x_3 + d_3x_2x_3),$$
$$\psi_4 = 2(b_4x_1x_2 + c_4x_1x_3 + d_4x_2x_3).$$

Si $c_3d_4 - c_4d_3 \gtrless 0$, on pourra, en changeant x_3 en $x_3 + tx_1 + ux_2$, faire disparaître les termes en x_1x_2. Puis la combinaison linéaire de ψ_3 et ψ_4 donnera les nouvelles formes

$$\varphi_3 = 2x_1x_3, \qquad \varphi_4 = 2x_2x_3 ;$$

d'où résulte le type canonique

$$\text{(VI)} \qquad \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 . 2x_1x_3 + \lambda_4 . 2x_2x_3$$

dont toutes les coniques ont un point commun $x_1 = x_2 = 0$.

Si $c_3d_4 - c_4d_3$ était nul, on pourrait, en combinant ψ_3 et ψ_4, éli-

miner $x_1 x_3$ et $x_2 x_3$ et obtenir ainsi la forme

$$\varphi_3 = 2x_1 x_2.$$

Le réseau R contiendrait une infinité de droites doubles, ayant pour expression générale $(\alpha x_1 + \beta x_2)^2$. On retombe sur le type (IV).

51. *Quatrième hypothèse :* R *ne contient qu'une droite double*

$$\varphi = x_1^2.$$

Il dérive de la combinaison de φ_1 avec trois autres formes ψ_2, ψ_3, ψ_4 qu'on peut supposer privées de termes en x_1^2. On pourra, par la combinaison de ces trois dernières formes, en déduire une d'où x_2^2, x_3^2, $x_2 x_3$ aient également disparu.

En effet, s'il en était autrement, on pourrait remplacer ψ_2, ψ_3, ψ_4 par trois de leurs combinaisons :

$$\chi_2 = b_2 . 2x_1 x_2 + c_2 . 2x_1 x_3 + x_2^2,$$
$$\chi_3 = b_3 . 2x_1 x_2 + c_3 . 2x_1 x_3 + 2x_2 x_3,$$
$$\chi_4 = b_4 . 2x_1 x_2 + c_4 . 2x_1 x_3 + x_3^2,$$

ne contenant chacune qu'un des produits précédents ; et l'on verrait aisément que R contient contre l'hypothèse une seconde droite double.

Considérons, en effet, la forme

$$t\varphi_1 + \chi_2 + 2s\chi_3 + s^2\chi_4 = tx_1^2 + (b_2 + 2b_3 s + b_4 s^2)2x_1 x_2 \\ + (c_2 + 2c_3 s + c_4 s^2)2x_1 x_3 + (x_2 + sx_3)^2.$$

En changeant x_2 en $x_2 - sx_3$, elle devient

$$tx_1^2 + x_2^2 + 2\mathfrak{B}x_1 x_2 + 2\mathfrak{C}x_1 x_3$$

où

$$\mathfrak{B} = b_2 + 2b_3 s + b_4 s^2,$$
$$\mathfrak{C} = c_2 + 2c_3 s + c_4 s^2 - s(b_2 + 2b_3 s + b_4 s^2)$$

et sera un carré parfait et représentera une droite double, si l'on déter-

mine s et t par les relations

$$\mathcal{C} = 0, \qquad \mathcal{B}^2 = t,$$

ce qui sera toujours possible si $\mathcal{C}$ contient s; et notamment si $b_1 \gtrless 0$.

Mais, d'autre part, si $b_1 = 0$, considérons la forme

$$t\varphi_1 + \chi_1 = tx_1^2 + c_1 \cdot 2x_1 x_3 + x_3^2.$$

Elle représentera une droite double si $t = c_1^2$.

Le réseau contient donc nécessairement une forme se réduisant à

$$\varphi_2 = 2(bx_2 + cx_3)x_1.$$

Par un changement de variables effectué sur x_2, x_3, on lui donnera l'expression plus simple

$$\varphi_2 = 2x_1 x_2.$$

Le réseau R résulte de la combinaison de φ_1, φ_2 avec deux autres formes génératrices ψ_3, ψ_4.

52. Si l'une de ces dernières, telle que ψ_3, contient un terme en x_3^2, on pourra, en changeant la variable x_3, ramener son expression à

$$\psi_3 = x_3^2 + ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$$

et, en la combinant avec φ_1, φ_2, on obtient la nouvelle forme

$$\varphi_3 = x_3^2 + cx_2^2.$$

Ce n'est pas une droite double; donc c n'est pas nul, et en remplaçant x_2, φ_2 par $\frac{x_2}{\sqrt{c}}$, $\sqrt{c}\varphi_2$ on le réduira à l'unité.

On aura donc

$$\varphi_3 = x_3^2 + x_2^2.$$

Considérons la dernière forme génératrice. En la combinant avec φ_1, φ_2, φ_3, on pourra en faire disparaître les termes en x_1^2, x_1x_2, x_2^2.

Elle aura donc pour expression

$$\varphi_4 = a x_3^2 + 2 b x_1 x_3 + 2 c x_2 x_3.$$

Mais la conique

$$t\varphi_1 + u\varphi_2 + v\varphi_3 + \varphi_4 = t x_1^2 + 2 u x_1 x_2 + v x_2^2 + (a+v) x_3^2 + 2 b x_1 x_3 + 2 c x_2 x_3$$

serait une droite double (contre l'hypothèse) si l'on pouvait satisfaire aux relations

$$a^2 = tv, \qquad b^2 = t(a+v), \qquad c^2 = v(a+v);$$

or, ce serait toujours possible si l'on n'avait pas $a = 0$, $c = 0$.

Donc φ_4 doit se réduire au terme $2 b x_1 x_3$. On peut évidemment supposer $b = 1$. On obtient ainsi le type

$$\text{(VII)} \qquad \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 . 2 x_1 x_2 + \lambda_3 (x_3^2 + x_2^2) + \lambda_4 . 2 x_1 x_3,$$

dont toutes les coniques ont deux points communs, $x_1 = x_3 \pm i x_2 = 0$.

33. Supposons en dernier lieu qu'aucune des formes de R ne contienne x_3^2 ; ψ_3 et ψ_4 auront les expressions suivantes :

$$\psi_3 = 2(a_3 x_1 + b_3 x_2) x_3 + f_3(x_1, x_2),$$
$$\psi_4 = 2(a_4 x_1 + b_4 x_2) x_3 + f_4(x_1, x_2),$$

où b_3 et b_4 ne peuvent être nuls à la fois. Car, en combinant ψ_3 et ψ_4, on obtiendrait la nouvelle forme

$$\psi = a_4 f_3(x_1, x_2) - a_3 f_4(x_1, x_2),$$

et R contenant ainsi trois formes φ_1, φ_2, ψ où ne figurent que x_1, x_2 contiendrait toutes les droites doubles $(\alpha x_1 + \beta x_2)^2$.

Soit donc $b_3 \gtrless 0$. On peut le supposer égal à 1. Changeons x_2 en $x_2 - a_3 x_1$, λ_1 en $\lambda_1 + 2 a_3 \lambda_2$, ce qui n'altère pas l'expression du faisceau $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 . 2 x_1 x_2$; ψ_3 sera changé en

$$2 x_2 x_3 + c x_1^2 + 2 d x_1 x_2 + e x_2^2.$$

On fera disparaître le terme en x_2^2 par le changement de x_3 en $x_3 - \frac{e}{2}x_2$, puis ceux en x_1^2, $x_1 x_2$ par soustraction de $c\varphi_1 + d\varphi_2$. On obtiendra ainsi une troisième forme génératrice

$$\varphi_3 = 2x_2 x_3.$$

Par combinaison de φ_1, φ_2, φ_3 avec ψ_4 on en fera disparaître les termes en x_1^2, $x_1 x_2$, $x_2 x_3$ et l'on obtiendra la dernière forme génératrice

$$\varphi_4 = 2a x_1 x_3 + b x_2^2,$$

a n'est pas nul, φ_4 ne représentant pas une droite double. On peut le supposer égal à 1 ; et si $b \gtrless 0$, on le réduira aussi à l'unité en changeant x_2, φ_2, φ_3 en $\frac{x_2}{\sqrt{b}}$, $\sqrt{b}\varphi_2$, $\sqrt{b}\varphi_3$. On aura donc les deux solutions

$$\varphi_4 = 2x_1 x_3 + x_2^2, \qquad \varphi_4 = 2x_1 x_3.$$

La première donne le type réduit

(VIII) $\quad \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 . 2x_1 x_2 + \lambda_3 . 2x_2 x_3 + \lambda_4(2x_1 x_3 + x_2^2)$

dont toutes les coniques ont un point commun $x_1 = x_2 = 0$.

La seconde donnerait le type suivant :

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 . 2x_1 x_2 + \lambda_3 . 2x_2 x_3 + \lambda_4 . 2x_1 x_3,$$

dont les coniques ont deux points communs

$$x_1 = x_2 = 0, \qquad x_1 = x_3 = 0.$$

Mais ce type est à rejeter. Il formerait double emploi avec le type (VII), dans lequel il se transforme si l'on change

$$x_2, \quad x_3, \quad \lambda_2, \quad \lambda_4$$

en

$$x_2 + ix_3, \qquad x_2 - ix_3, \qquad \tfrac{1}{2}(\lambda_2 - i\lambda_4), \qquad \tfrac{1}{2}(\lambda_2 + i\lambda_4).$$

Nous aurons donc en tout *huit* types réduits essentiellement distincts. Donc $N_{13} = 8$.

Troisième cas : $m = 5$.

54. Le réseau R contient tout d'abord une droite double

$$\varphi_1 = x_1^2.$$

D'autre part, les cinq coniques génératrices ne contenant x_1 que dans les trois combinaisons x_1^2, x_1x_2, x_1x_3, deux d'entre elles se réduiront à des formes binaires $f(x_2, x_3)$, $f_1(x_2, x_3)$. Parmi les combinaisons de ces deux formes il en est au moins une, et en général deux, qui sont des carrés parfaits. R contiendra donc au moins deux droites doubles, et en général trois droites doubles non concourantes.

Traitons d'abord ce cas général.

55. On aura

$$\varphi_1 = x_1^2, \qquad \varphi_2 = x_2^2, \qquad \varphi_3 = x_3^2.$$

Les deux autres coniques génératrices pourront être supposées réduites à la forme

$$ax_1x_2 + bx_2x_3 + cx_3x_1.$$

En les combinant linéairement, on obtiendra les expressions plus simples

$$\varphi_4 = 2x_1x_2 + d_4x_2x_3,$$
$$\varphi_5 = 2x_1x_3 + d_5x_2x_3.$$

Changeant $x_2, x_3, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5$ en $tx_2, ux_3, \frac{\varphi_2}{t^2}, \frac{\varphi_3}{u^2}, \frac{\varphi_4}{t}, \frac{\varphi_5}{u}$, on changera d_4, d_5 en ud_4, td_5. On peut donc rendre égaux à 1 ceux de ces coefficients qui ne sont pas nuls. D'ailleurs l'échange de x_2 avec x_3 les permute entre eux. On n'a donc que trois cas distincts à considérer :

$$d_4 = 1, \qquad d_5 = 1,$$
$$d_4 = 1, \qquad d_5 = 0,$$
$$d_4 = 0, \qquad d_5 = 0.$$

d'où trois types de réseaux :

(I) $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + \lambda_4 2(x_1 x_2 + x_2 x_3) + \lambda_5 2(x_1 x_3 + x_2 x_3)$,

(II) $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + \lambda_4 2(x_1 x_2 + x_2 x_3) + \lambda_5 2 x_1 x_3$,

(III) $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + \lambda_4 2 x_1 x_2 \qquad\qquad + \lambda_5 2 x_1 x_3$.

Le premier n'a que trois droites doubles x_1^2, x_2^2, x_3^2. Le second a pour droites doubles x_2^2 et toutes les droites qui passent par le point $x_1 = x_3 = 0$. Le dernier, toutes celles qui passent par un des deux points $x_1 = x_2 = 0$, ou $x_1 = x_3 = 0$.

Ces trois types sont donc nettement distincts.

56. Passons au cas où toutes les droites doubles sont concourantes. On a vu qu'il en existe au moins deux :

$$\varphi_1 = x_1^2, \qquad \varphi_2 = x_2^2.$$

Les trois autres coniques génératrices peuvent être supposées réduites à la forme

$$2a x_1 x_2 + 2b x_2 x_3 + 2c x_3 x_1 + d x_3^2.$$

En les combinant entre elles, on en obtient une nouvelle, de la forme

$$\varphi_3 = 2c' x_3 x_1 + d' x_3^2.$$

Mais, si d' n'était pas nul, R contiendrait une nouvelle droite double

$$\varphi_3 + t\varphi_1 = t x_1^2 + 2c' x_3 x_1 + d' x_3^2,$$

en posant $t = \dfrac{c'^2}{d'}$.

Il faut donc admettre que $d' = 0$. Quant à c', on peut le supposer égal à 1. On aura donc

$$\varphi_3 = 2 x_1 x_3.$$

On verra de même que R contient la conique

$$\varphi_4 = 2 x_2 x_3.$$

La dernière conique génératrice φ_5 peut être supposée réduite à la forme

$$2ax_1x_2 + bx_3^2.$$

Ce n'est pas une droite double; donc a n'est pas nul; on peut le supposer égal à 1. Si b n'est pas nul, on le réduira aussi à l'unité en changeant x_3, φ_3, φ_4 en $\frac{x_3}{\sqrt{b}}$, $\sqrt{b}\varphi_3$, $\sqrt{b}\varphi_4$. On aura donc en posant $b = 1$, $b = 0$ deux nouveaux types :

(IV) $\quad \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3\, 2x_1x_3 + \lambda_4\, 2x_2x_3 + \lambda_5(2x_1x_2 + x_3^2),$

(V) $\quad \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3\, 2x_1x_3 + \lambda_4\, 2x_2x_3 + \lambda_5\, 2x_1x_2.$

Dans le type (IV) il n'y a que deux droites doubles, x_1^2 et x_2^2; dans le type (V) on a toutes celles qui se croisent au point $x_1 = x_2 = 0$.

Nous avons trouvé en tout cinq types distincts : donc

$$N_{53} = 5.$$

TABLE DES MATIÈRES.

SIXIÈME SÉRIE. — TOME II.

Les indications qui précèdent le titre de chaque Mémoire de cette Table sont celles adoptées par le Congrès international de Bibliographie des Sciences mathématiques en 1889.
(*Note de la Rédaction.*)

Pages.

[S4b] Sur la propagation des réactions chimiques dans les gaz; par M. *Jouguet* 5

[D4] Sur les fonctions ayant un nombre fini de branches; par M. *Georges Rémoundos* 87

[S2e] Sur les actions exercées par un fluide parfait incompressible sur ses parois; par M. *G. Combebiac* 109

[G2b] Sur les périodes des intégrales doubles; par M. *H. Poincaré* ... 135

[A3] Sur quelques cas d'irréductibilité des polynomes à coefficients rationnels; par M. *G. Dumas* 191

[J2] Théorie des probabilités continues; par M. *Louis Bachelier* ... 259

[G4b] Sur les fonctions abéliennes singulières d'invariants *huit*, *douze* et *cinq*; par M. *G. Humbert* 329

Pages.

[H9d] Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre du type hyperbolique; par M. *R. d'Adhémar*.. 357

[H2] Sur les points dicritiques; par M. *H. Dulac*.................. 381

Réduction d'un réseau de formes quadratiques ou bilinéaires; par M. *Camille Jordan*................................ 403

FIN DU TOME II DE LA SIXIÈME SÉRIE.

37324 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

